Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXXVII Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 24 stycznia 2023 r.

Modelowanie

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: .....

Czas trwania egzaminu: 120 minut

Uwagi

a) W prezentowanych wynikach separatorem dziesiętnym (znakiem dziesiętnym) jest kropka „ .”.

b) W prezentowanych wynikach oszacowań uogólnionych modeli liniowych (GLM):
- Residual deviance i Resid. Dev – oznacza dewiancję oszacowanego modelu,
- Null deviance – oznacza dewiancję modelu zerowego,
- Deviance – redukcję dewiancji po dodaniu kolejnej zmiennej objaśniającej,
- Df – stopnie swobody,
- Sum Sq – suma kwadratów.

c) Wartości $\chi^2_{\alpha;v}$ rozkładu chi-kwadrat spełniające warunek $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha;v}) = \alpha$

v \ α	***0.99***	***0.95***	***0.90***	***0.48***	***0.49***	***0.50***	***0.10***	***0.05***	***0.01***	***0.008***	***0.007***	***0.005***
1	0.000	0.004	0.016	0.499	0.477	0.455	2.706	3.841	6.635	7.033	7.273	7.879
2	0.020	0.103	0.211	1.468	1.427	1.386	4.605	5.991	9.210	9.657	9.924	10.597
3	0.115	0.352	0.584	2.474	2.420	2.366	6.251	7.815	11.345	11.827	12.115	12.838
4	0.297	0.711	1.064	3.486	3.421	3.357	7.779	9.488	13.277	13.789	14.094	14.860
5	0.554	1.145	1.610	4.499	4.425	4.351	9.236	11.070	15.086	15.625	15.946	16.750
6	0.872	1.635	2.204	5.512	5.430	5.348	10.645	12.592	16.812	17.375	17.710	18.548
7	1.239	2.167	2.833	6.525	6.435	6.346	12.017	14.067	18.475	19.060	19.408	20.278
8	1.646	2.733	3.490	7.537	7.440	7.344	13.362	15.507	20.090	20.696	21.056	21.955
9	2.088	3.325	4.168	8.548	8.445	8.343	14.684	16.919	21.666	22.291	22.663	23.589
10	2.558	3.940	4.865	9.559	9.450	9.342	15.987	18.307	23.209	23.853	24.235	25.188
11	3.053	4.575	5.578	10.570	10.455	10.341	17.275	19.675	24.725	25.386	25.779	26.757
12	3.571	5.226	6.304	11.580	11.460	11.340	18.549	21.026	26.217	26.895	27.297	28.300
13	4.107	5.892	7.042	12.589	12.464	12.340	19.812	22.362	27.688	28.383	28.794	29.819
14	4.660	6.571	7.790	13.599	13.469	13.339	21.064	23.685	29.141	29.851	30.272	31.319
15	5.229	7.261	8.547	14.608	14.473	14.339	22.307	24.996	30.578	31.303	31.732	32.801
16	5.812	7.962	9.312	15.617	15.477	15.338	23.542	26.296	32.000	32.740	33.178	34.267
17	6.408	8.672	10.085	16.626	16.481	16.338	24.769	27.587	33.409	34.162	34.609	35.718
18	7.015	9.390	10.865	17.634	17.485	17.338	25.989	28.869	34.805	35.573	36.027	37.156
19	7.633	10.117	11.651	18.642	18.489	18.338	27.204	30.144	36.191	36.972	37.434	38.582
20	8.260	10.851	12.443	19.650	19.493	19.337	28.412	31.410	37.566	38.360	38.830	39.997

Zadanie 1.

Wysokość pojedynczego roszczenia Y_i w pewnym portfelu ubezpieczeń AC modelowano z uwzględnieniem dwóch zmiennych objaśniających:

- *CarAge.kat* - wiek samochodu. Zmienna jakościowa przyjmująca następujące kategorie: [0, 5], (5, 10] i (10,100].
- *Gas* – rodzaj silnika. Zmienna jakościowa przyjmująca następujące kategorie: *Regular* i *Diesel*.

Oszacowano dwa uogólnione modele liniowe, w których uwzględniono powyższe zmienne objaśniające i założono rozkład gamma dla Y_i. Model M1, w którym nie uwzględniono interakcji między zmiennymi *CarAge.kat* i *Gas* oraz M2, w którym uwzględniono interakcje. W obydwu modelach przyjęto kanoniczną funkcję łączącą. Uzyskano następujące wyniki:

- **Model M1** (bez interakcji)

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)
(Intercept)	7.445e-04	9.683e-06	76.893	< 2e-16 ***
CarAge.kat(5,10]	2.867e-05	1.314e-05	2.183	0.029085 *
CarAge.kat(10,100]	7.396e-05	1.387e-05	5.332	9.83e-08 ***
GasRegular	4.219e-05	1.127e-05	3.745	0.000181 ***

Signif. codes: 0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

(Dispersion parameter for Gamma family taken to be 0.7834687)

Null deviance: 11904 on 15866 degrees of freedom
Residual deviance: 11867 on 15863 degrees of freedom
AIC: 257024

- **Model M2** (z interakcją)

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)
(Intercept)	7.590e-04	1.127e-05	67.337	< 2e-16 ***
CarAge.kat(5,10]	2.348e-05	1.744e-05	1.347	0.178
CarAge.kat(10,100]	1.988e-05	1.869e-05	1.063	0.288
GasRegular	7.362e-06	1.725e-05	0.427	0.669
CarAge.kat(5,10]:GasRegular	1.327e-05	2.648e-05	0.501	0.616
CarAge.kat(10,100]:GasRegular	1.143e-04	2.768e-05	4.131	3.64e-05 ***

Signif. codes: 0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

(Dispersion parameter for Gamma family taken to be **0.781385**)

Null deviance: 11904 on 15866 degrees of freedom
Residual deviance: 11852 on 15861 degrees of freedom
AIC: 257007

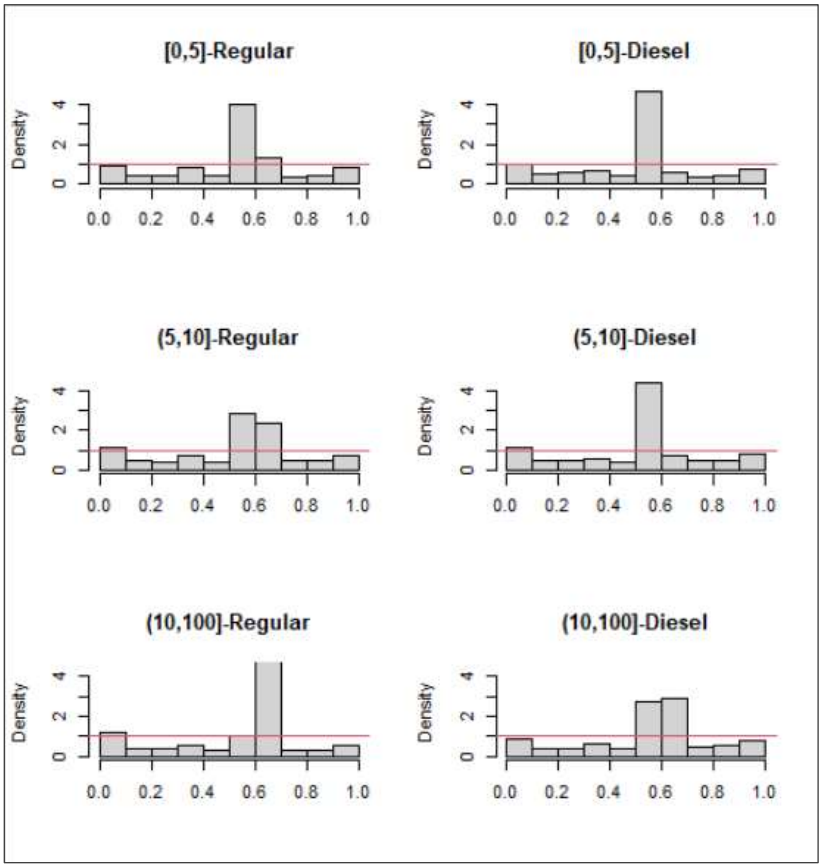
– **Analiza dewiancji**

	Df	Deviance	Resid. Df	Resid. Dev	F	Pr(>F)
NULL			15866	11904		
CarAge.kat	2	25.886	15864	11878	16.564	6.511e-08 ***
Gas	1	11.024	15863	11867	14.108	0.0001732 ***
CarAge.kat:Gas	2	**14.606**	15861	11852	?	8.780e-05 ***

Signif. codes: 0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

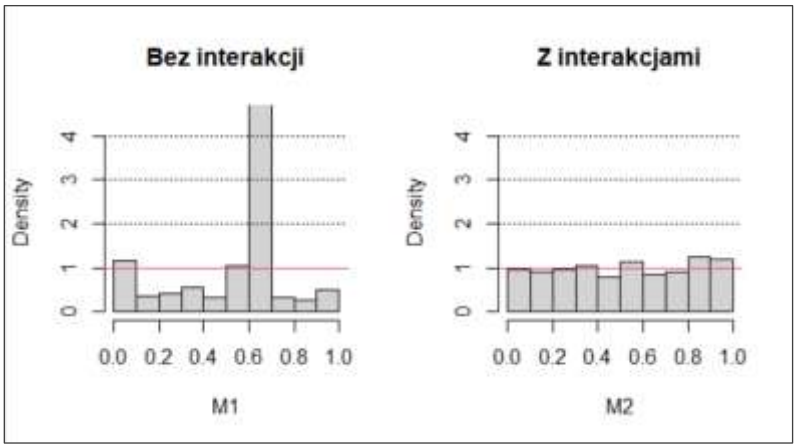
Wykorzystując zbiór testowy i model **M1**, dla każdej klasy ryzyka (tj. każdej kombinacji kategorii zmiennej *CarAge.kat* i *Gas*) skonstruowano histogram wartości $F_{G_i}(y_{j,G_i})$, gdzie: F_{G_i} – oszacowana dystrybuanta rozkładu gamma odpowiadająca klasie G_i, y_{j,G_i} – wysokości zanotowanych roszczeń w klasie G_i. Histogramy są przedstawione na rysunku 1.1.

Rys.1.1.



Na rysunku 1.2 przedstawiono analogiczne wykresy dla klasy (10,100]-Regular skonstruowane z wykorzystaniem modelu M1 (z lewej strony) i Modelu M2 (z prawej strony).

Rys.1.2



a) (***1p.***) Czy skonstruowane wykresy są przydatne w ocenie jakości oszacowanych modeli? Odpowiedź uzasadnij!
b) (***1p.***) Uzasadnij dlaczego w analizie dewiancji wybrano test F. Oblicz brakującą wartość statystyki F dla interakcji.
c) (**2p.**) Na podstawie podanych wyników wybierz lepszy model. Wybór uzasadnij odwołując się do wyników analizy dewiancji i podanych wykresów.
d) (***1p.***) Wykorzystując wybrany model, wyznacz prognozę wysokości pojedynczego roszczenia dla klasy: (10,100]-Regular.

Odpowiedzi

.....

Odp. a)

Tak.
W uzasadnieniu należało odwołać się do faktu, że jeżeli ciągła zmienna losowa X posiada dystrybuantę F, to $F(X) \sim U_{(0,1)}$, gdzie $U_{(0,1)}$ oznacza rozkład jednostajny na przedziale $(0,1)$.

.....

Odp. b)

W uzasadnieniu należało wskazać, że w testowanym modelu był szacowany parametr dyspersji.
Statystyka wyraża się wzorem:

$$F = \frac{D\left(y; \hat{\theta}^P\right) - D\left(y; \hat{\theta}^Q\right)}{\hat{\phi}(q-p)},$$

gdzie:
$D\left(y; \hat{\theta}^P\right)$ – dewiancja modelu o mniejszej liczbie parametrów p,
$D\left(y; \hat{\theta}^Q\right)$ – dewiancja modelu o większej liczbie parametrów q,

$\hat{\phi}$ - oszacowanie parametru dyspersji modelu o większej liczbie parametrów.

Stąd (podstawiane wartości zaznaczono w treści zadania na czerwono):

$$F = \frac{14.606}{0.781385 \cdot 2} = 9.346225.$$

.....

Odp. c)

Należało wskazać model M2. Wynik testu *F* wskazuje, że ma on lepsze zdolności predykcyjne, co potwierdza także wykres na rysunku 1.2.

.....

Odp. d)

Prognoza

$$y^P = \frac{1}{0.000759 + 0.00001988 + 0.000007362 + 0.0001143} = 110.44$$

Rozwiązanie:

Zadanie 2.

Ubezpieczyciel chce zaoferować swoim dotychczasowym klientom nowe ubezpieczenie podróży z ochroną Covid. Chcąc dowiedzieć się, jaki wpływ miały określone cechy klienta na zawarcie ubezpieczenia podróży, aktuariusz na podstawie istniejących danych historycznych oszacował dwa modele logistyczne: model A i model B. Zmienna zależna w tych modelach przyjmuje dwie wartości: Y=1, gdy klient kupi ubezpieczenie oraz Y=0, gdy nie kupi). Aktuariusz wziął pod uwagę następujące cechy:

- *plec*: Płeć klienta (K - kobieta, M – mężczyzna)
- *zamieszkanie*: Zamieszkanie klienta (Miasto, Wies)
- *wiek*: Wiek klienta (zmienna jakościowa przyjmująca trzy kategorie: G1, G2, G3, przy czym im wyższa kategoria, tym klienci są starsi).
- *dochod*: Roczny dochód klienta **w tys. zł** (zmienna ilościowa).

Uzyskał następujące oszacowania:

- **Model A**

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(>|z|)
(Intercept)	-4.272412	0.300839	-14.202	< 2e-16 ***
plecM	-1.182367	0.129969	-9.097	< 2e-16 ***
zamieszkanieWies	-0.776746	0.115418	-6.730	1.7e-11 ***
wiekG2	0.375125	0.278850	1.345	0.179
wiekG3	1.508494	0.158664	9.507	< 2e-16 ***
dochod	0.043211	0.002582	16.734	< 2e-16 ***

Signif. codes: 0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

(Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)

Null deviance: 2402.7 on 1864 degrees of freedom

Residual deviance: 1894.8 on 1859 degrees of freedom

AIC: 1906.8

- **Model B**

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(>|z|)
(Intercept)	-3.627971	0.322008	-11.267	< 2e-16 ***
plecM	-1.166195	0.131567	-8.864	< 2e-16 ***
zamieszkanieWies	-0.788570	0.116191	-6.787	1.15e-11 ***
wiekG2	-1.053609	1.496586	-0.704	0.4814
wiekG3	-1.741291	0.755040	-2.306	0.0211 *
dochod	0.037605	0.002782	13.519	< 2e-16 ***
wiekG2:dochod	0.012794	0.013458	0.951	0.3418
wiekG3:dochod	0.035700	0.008208	4.350	1.36e-05 ***

Signif. codes: 0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

(Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)

Null deviance: 2402.7 on 1864 degrees of freedom

Residual deviance: 1871.6 on 1857 degrees of freedom

AIC: 1887.6

a) **(1*p*.)** Zinterpretuj parametry **modelu A** dla zmiennej *wiek* i *dochod*. Wykorzystaj ilorazy szans.
b) **(1*p*.)** Oblicz maksymalne prawdopodobieństwo kupna ubezpieczenia dla klienta z rocznym dochodem w wysokości 100 000 zł, wykorzystując model A i model B.
c) **(1*p*.)** Roczny dochód klienta aktuariusz uwzględnił w modelu w sposób liniowy jako zmienną ilościową. Wymień trzy inne opcje.
d) **(2*p*.)** Wykorzystując odpowiedni test, sprawdź czy wszystkie parametry (łącznie) interakcji między wiekiem a rocznym dochodem są statystycznie istotne. Zapisz odpowiednie hipotezy (tj. zerową i alternatywną), podaj statystykę testową i jej rozkład. Przyjmij poziom istotności równy 0.05.

Odpowiedzi

.....

Odp. a)

Zmienna *wiek*:

Parametr stojący przy kategorii *wiek*G2 wynosi 0.375125. Dodatnia wartość parametru wskazuje, że klienci z kategorii wiekowej G2 są bardziej podatni na zawarcie ubezpieczenia podróży w porównaniu z klientami z kategorii wiekowej G1. Jeżeli klienci różnią się tylko kategorią wiekową, to klienci z kategorii G2 mają o $(\exp(0.375125) - 1) \cdot 100\% = 45.52\%$ wyższe szanse na zawarcie ubezpieczenia podróży w porównaniu z klientami z kategorii wiekowej G1.

Parametr stojący przy kategorii *wiek*G3 wynosi 1.508494. Dodatnia wartość parametru wskazuje, że klienci z kategorii wiekowej G3 są bardziej podatni na zawarcie ubezpieczenia podróży w porównaniu z klientami z kategorii wiekowej G1. Jeżeli klienci różnią się tylko kategorią wiekową, to klienci z kategorii G3 mają o $(\exp(1.508494) - 1) \cdot 100\% = 351.99\%$ wyższe szanse na zawarcie ubezpieczenia podróży w porównaniu z klientami z kategorii wiekowej G1.

Zmienna *dochod*:

Parametr stojący przy zmiennej *dochod* wynosi 0.043211. Spośród klientów identycznych pod względem innych cech zawartych w modelu, a różniący się tylko rocznym dochodem o 1 tys. zł, klienci bogatsi (o 1 tys. zł.) mają $(\exp(0.043211) - 1) \cdot 100\% = 4.42\%$ wyższe szanse na zawarcie ubezpieczenia podróży w porównaniu z klientami biedniejszymi.

.....

Odp. b)

Maksymalne prawdopodobieństwo występuje w grupie kobiet mieszkających w mieście z kategorii wiekowej G3.

Model A:

$$\hat{p} = \frac{\exp(-4.272412 + 1.508494 + 0.043211 \cdot 100)}{1 + \exp(-4.272412 + 1.508494 + 0.043211 \cdot 100)} = 0.825952$$

Model B:

$$\hat{p} = \frac{\exp(-3.627971 - 1.741291 + 0.037605 \cdot 100 + 0.0357 \cdot 100)}{1 + \exp(-3.627971 - 1.741291 + 0.037605 \cdot 100 + 0.0357 \cdot 100)} = 0.87666$$

.....

Odp. c)

- założyć zależność wielomianową, np. kwadratową:$dochod + dochod^2$
- funkcja gładka (model GAM)
- przekształcić na zmienną jakościową (utworzyć kategorie dochodu)

.....

Odp. d)

Współczynniki interakcji (łącznie) są statystycznie istotne.

H_0: Wszystkie współczynniki interakcji między wiekiem a rocznym dochodem są równe zero.

H_1: Przynajmniej jeden współczynnik jest różny od zera.

Statystyka wyraża się wzorem:

$$\chi^2 = D\left(y; \hat{\theta}^P\right) - D\left(y; \hat{\theta}^Q\right),$$

gdzie:

$D\left(y; \hat{\theta}^P\right)$ – dewiancja modelu o mniejszej liczbie parametrów p,

$D\left(y; \hat{\theta}^Q\right)$ – dewiancja modelu o większej liczbie parametrów q,

Stąd (podstawiane wartości zaznaczono w treści zadania na czerwono):

$$\chi^2 = 1894.8 - 1871.6 = 23.2$$

Wartość statystyki można było także wyznaczyć korzystając wartości kryterium AIC dla tych modeli.

Wartość krytyczna: $\chi^2_{0.05;2} = 5.991$.

Rozwiązanie:

Zadanie 3.
Ubezpieczyciel chce wykorzystać model regresji Poissona do analizy liczby szkód w swoim portfelu ubezpieczeń komunikacyjnych. Zebrał następujące dane dotyczące liczby roszczeń $k_i, i = 1,2, \dots ,35$ z trzech różnych klas polis:

- Klasa A ($i = 1, \dots 10$): 1 2 0 2 1 0 0 2 2 1
- Klasa B ($i = 11, \dots 15$): 1 0 1 1 0
- Klasa C ($i = 16, \dots 35$): 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0
  1 0 1 0 0 0 0 0 0 0

a) (**2*p.***) Wykaż, że rozkład Poissona należy do wykładniczej rodziny rozkładów. Przyjmij następującą parametryzację wykładniczej rodziny rozkładów:

$$f(y_i; \theta_i, \phi) = exp\left(\frac{y_i\theta_i - b(\theta_i)}{a(\phi)} + c(y_i, \phi)\right),$$

gdzie: θ_i - parametr kanoniczny, ϕ - parametr dyspersji.

b) (**3*p.***) Aktuariusz wybrał model, w którym:

$$\ln(\lambda_i) = \begin{cases} \alpha, & i = 1, \dots 10 \\ \beta, & i = 11, \dots 15 \\ \gamma, & i = 16, \dots 35 \end{cases}$$

gdzie λ_i jest wartością oczekiwaną odpowiedniego rozkładu Poissona. Wyznacz logarytm funkcji wiarygodności dla tego modelu, a następnie znajdź oszacowania największej wiarygodności dla α, β i γ.

Odpowiedzi

.....

Odp. a)

Funkcja prawdopodobieństwa dla rozkładu Poissona ma postać:

$$f(y; \lambda) = \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!} = \exp(y \ln(\lambda) - \lambda - \ln(y!)\ ),$$

stąd:
$\theta = \ln(\lambda)$,
$\phi = 1$, czyli $a(\phi) = 1$,
$b(\theta) = e^{\theta}$,
$c(y, \phi) = -\ln(y!)$.

.....

Odp. b)

Logarytm wiarygodności można zapisać w następujący sposób:

$$l(\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C) = \ln(L(\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C)) = \sum y_i \ln(\lambda_i) - \sum \lambda_i - \sum \ln(y_i!).$$

Stąd otrzymujemy:

$$l = \alpha \sum_{i=1}^{10} y_i + \beta \sum_{i=11}^{15} y_i + \gamma \sum_{i=16}^{35} y_i - 10e^{\alpha} - 5e^{\beta} - 20e^{\gamma} - \sum_{i=1}^{35} \ln(y_i!)$$
$$= 11\alpha + 3\beta + 4\gamma - 10e^{\alpha} - 5e^{\beta} - 20e^{\gamma} - \sum_{i=1}^{35} \ln(y_i!)$$

Obliczając pochodne cząstkowe względem α, β oraz γ otrzymujemy:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} l = 11 - 10e^{\alpha}$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} l = 3 - 5e^{\beta}$$

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} l = 4 - 20e^{\gamma}$$

stąd:

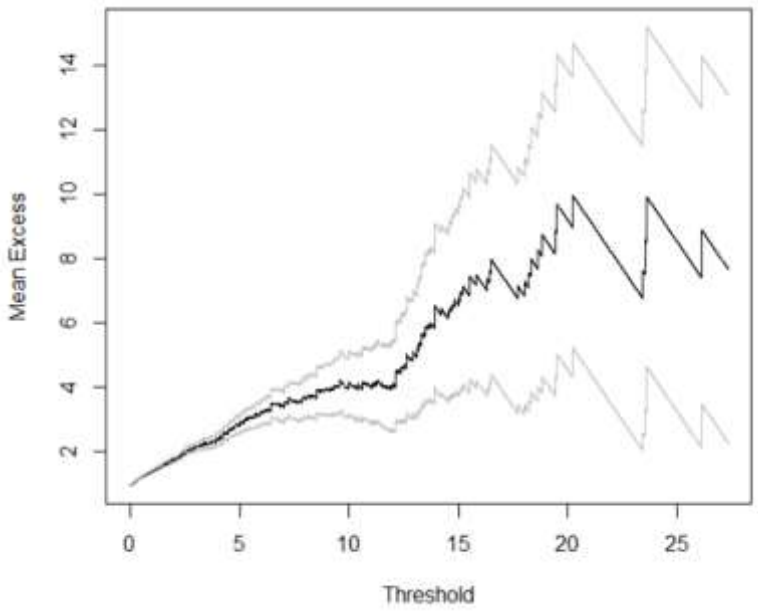
$$\hat{\alpha} = \ln 1.1 = 0.09531$$
$$\hat{\beta} = \ln 0.6 = -0.51083$$
$$\hat{\gamma} = \ln 0.2 = -1.60944$$

Rozwiązanie:

Zadanie 4.

a) (**1*p.***) Krótko przedstaw czym zajmuje się Teoria Wartości Ekstremalnych (*Extreme Value Theory, EVT*) i wskaż możliwości jej wykorzystania przez aktuariusza.
b) (**1*p.***) Jednym z głównych podejść wykorzystywanych w *EVT* jest analiza przekroczeń progu *POT* (*Peaks Over Threshold*). Krótko omów to podejście.
c) (**2*p.***) Wskaż dlaczego w metodzie POT kluczową rolę odgrywa ustalenie progu przekroczeń na właściwym poziomie. Uzasadnij dlaczego w tym celu (ustaleniu progu) można wykorzystać funkcję wartości oczekiwanej nadwyżki (*mean excess function*).
d) (**1*p.***) Na poniższym rysunku (Rys. 4.1.) przedstawiono empiryczną funkcję wartości oczekiwanej nadwyżki dla pewnego zbioru szkód. Na jej podstawie ustal wartość progu. Wybór uzasadnij!

Rys. 4.1.



Odpowiedzi

.....

Odp. a)

Zobacz np.:

- Podrozdział 9.1 w: "Effective Statistical Learning Methods for Actuaries I" - M. Denuit, D. Hainaut, J. Trufin, Springer, 2019.
- Wstęp do rozdziału 5 (str. 135) w: "Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools", revised edition - A. McNeil, R. Frey, P. Embrechst, Princeton, 2015

.....

Odp. b)

Zobacz np. podrozdział 9.5 w: “Effective Statistical Learning Methods for Actuaries I” - M. Denuit, D. Hainaut, J. Trufin, Springer, 2019.

.....

Odp. c)

W odpowiedzi należało wskazać:

- na klasyczny problem związany z kompromisem obciążenie-wariancja: wybór zbyt niskiego progu oznacza, że założenie dotyczące ogona jest niewłaściwe, natomiast wybór zbyt wysokiego progu oznacza, że mamy zbyt mało obserwacji, aby rozsądnie oszacować parametry rozkładu. Szczegóły np. w podrozdziale 9.5.5 w: w: “Effective Statistical Learning Methods for Actuaries I” - M. Denuit, D. Hainaut, J. Trufin, Springer, 2019.
- na liniową postać funkcji wartości oczekiwanej nadwyżki po przekroczeniu odpowiedniego progu. Szczegóły np. w podrozdziale 5.2.2 w: “Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools”, revised edition - A. McNeil, R. Frey, P. Embrechst, Princeton, 2015.

.....

Odp. d)

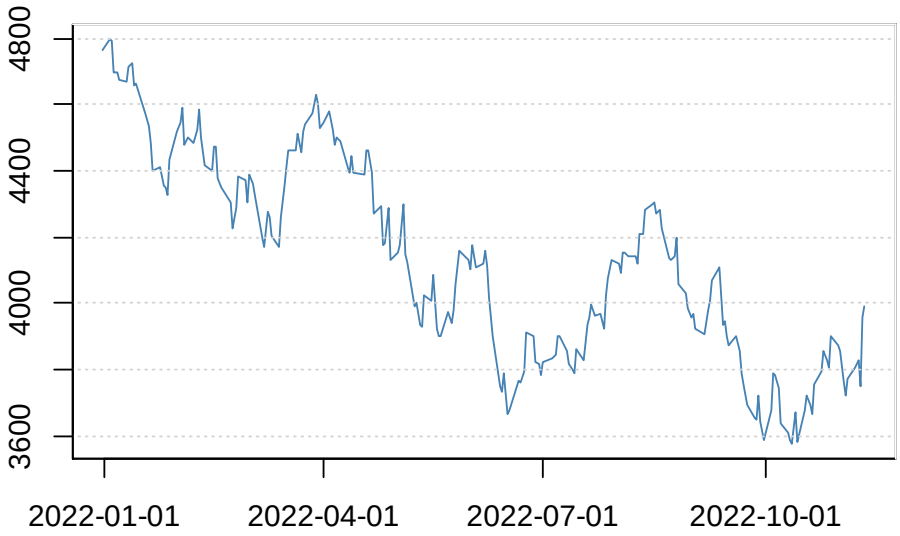
Należało wskazać wartość ok. 12. W uzasadnieniu powołać się na w przybliżeniu liniową postać empirycznej funkcji wartości oczekiwanej nadwyżki po przekroczeniu 12.

Rozwiązanie:

Zadanie 5.

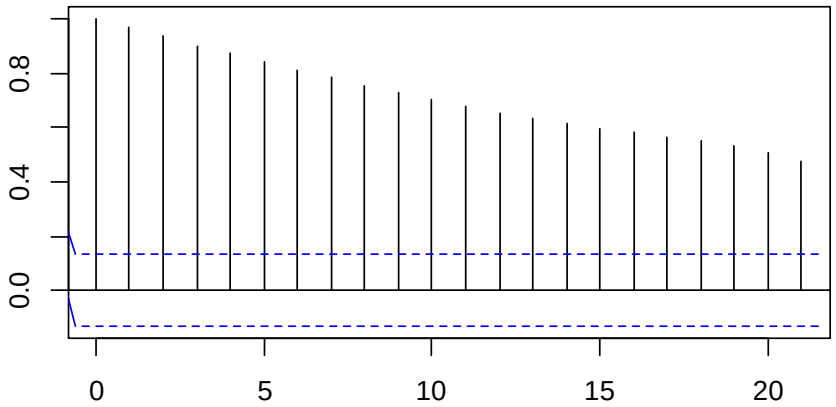
a) (**1*p.***) Wymień warunki stacjonarności (słabej) szeregu czasowego.
b) (**1*p.***) Podaj definicję procesu błądzenia losowego.
c) (**1*p.***) Wskaż i krótko przedstaw co najmniej dwie metody identyfikacji procesu błądzenia losowego.
d) (**2*p.***) Na poniższym wykresie (Rys. 5.1) podano notowania indeksu SP500 w okresie od 31-12-2021 do 11-11-2022.

Rys. 5.1. Notowania SP500



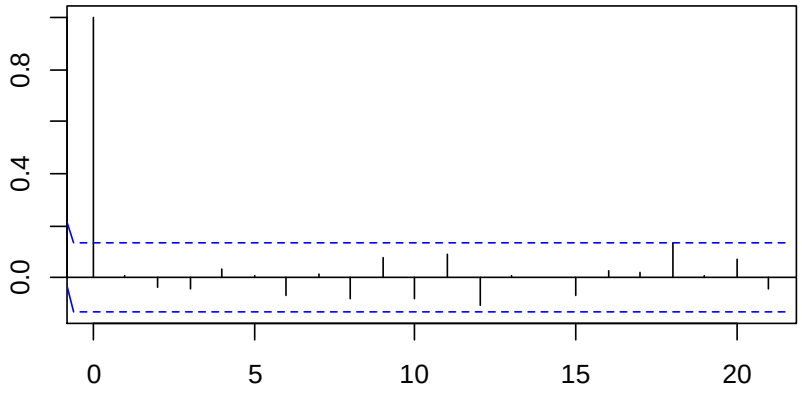
Funkcję autokorelacji dla tego szeregu czasowego (tj. notowań indeksu SP500) przedstawia rysunek 5.2.

Rys. 5.2. ACF dla SP500

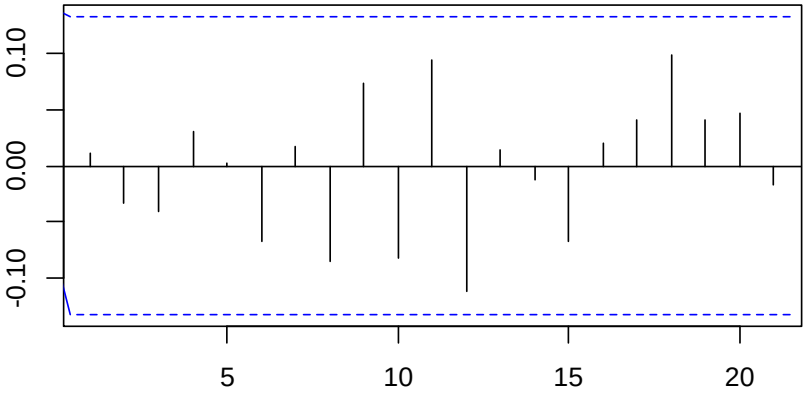


Z kolei rysunki 5.3 i 5.4 przedstawiają odpowiednio funkcję autokorelacji i autokorelacji cząstkowej dla szeregu czasowego pierwszych różnic notowań indeksu SP500.

Rys. 5.3. ACF dla pierwszych różnic



Rys. 5.4. PACF dla pierwszych różnic



Wiadomo także, że odchylenie standardowe wynosi:

- dla notowań: 306.8
- dla pierwszych różnic: 63.9.

Czy w oparciu o podane informacje można twierdzić, że przedstawiony na rysunku 5.1 szereg czasowy notowań indeksu SP500 jest realizacją procesu błądzenia losowego? Odpowiedź uzasadnij!

Odpowiedzi

.....

Odp. a)

W odpowiedzi należało wskazać, że szereg czasowy $(y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ jest stacjonarny (słabo stacjonarny) jeżeli:

- wartość oczekiwana $E(y_t)$ nie zależy od t $(E(y_t) = \mu, \ \ t \in \mathbb{Z})$,
- kowariancja między y_s a y_t zależy tylko od $|s-t|$ $(cov(y_s, y_t) = cov(y_{s+k}, y_{t+k}), \quad s,t,k \in \mathbb{Z})$.

Szczegóły np. w podrozdziale 7.3 w: "Regression Modeling with Actuarial and Financial Applications" - E.W. Frees, Cambridge, 2009.

.....

Odp. b)
Proces błądzenia losowego definiuje się w następujący sposób:

$$y_t = y_{t-1} + c_t$$

gdzie c_t jest procesem białego szumu.
Szczegóły np. w podrozdziale 7.4 w: "Regression Modeling with Actuarial and Financial Applications" - E.W. Frees, Cambridge, 2009.

.....

Odp. c)
Na przykład sprawdzenie:

- czy w szeregu można wyodrębnić trend liniowy,
- czy wariancja y_t wzrasta wraz ze wzrostem *t*,
- czy przyrosty $y_t - y_{t-1}$ stanowią proces białego szumu,
- czy odchylenie standardowe szeregu przyrostów jest istotnie mniejsze w porównaniu z odchyleniem standardowym oryginalnego szeregu.

Należało wskazać i omówić co najmniej dwie metody.
Szczegóły np. w podrozdziale 7.4 w: "Regression Modeling with Actuarial and Financial Applications" - E.W. Frees, Cambridge, 2009.

.....

Odp. d)
Notowani indeksu SP500 są realizacją procesu błądzenia losowego.
Wskazuje na to:

- Funkcja autokorelacji szeregu czasowego notowań indeksu SP500. Dla procesu błądzenia losowego $cov(y_t, y_s) = t\sigma_c^2, 1 \leq t \leq s$.
- Funkcje autokorelacji i autokorelacji cząstkowej dla pierwszych różnic, które są charakterystyczne dla procesu białego szumu.
- Istotnie mniejsze odchylenie standardowe szeregu pierwszych różnic w porównaniu z odchyleniem standardowym oryginalnego szeregu.

Rozwiązanie:

Zadanie 6.

a) (**2*p***) Co rozumiemy przez pojęcia wariancja i obciążenie metody uczenia statystycznego?

b) (**1*p***) Rozważmy model $Y = f(X) + \varepsilon,\ X = (X_1, \dots, X_p)$. Tutaj f jest pewną ustaloną, ale nieznaną funkcją $X_1, \dots, X_p$, a ε jest składnikiem losowym, który jest niezależny od X i ma średnią zero. Niech $\left(y_0 - \hat{f}(x_0)\right)^2$ oznacza kwadrat błędu predykcji dla obserwacji (x_0, y_0) ze zbioru testowego (czyli średni błąd kwadratowego (*mean squared error, MSE*) prognozy wyznaczonej dla obserwacji (x_0, y_0) ze zbioru testowego), $\hat{f}$ jest oszacowaniem f na zabiorze uczącym. Wskaż (bez dowodu) na jakie trzy składowe można zdekomponować $E\left[\left(y_0 - \hat{f}(x_0)\right)^2\right]$.

c) (**2*p***) Omów jak zmieniają się te składowe wraz ze zmianą elastyczności modelu, tj. jego zdolności do dopasowywania się do danych rzeczywistych (model chrakteryzujący się większą elastycznością lepiej dopasowuje się do danych).

Odpowiedzi:

.....

Odp. a)

W odpowiedzi należało wskazać, że:

- wariancja odnosi się do wielkości, o jaką zmieniają się $\hat{f}$ otrzymane przy użyciu różnych zestawów danych uczących.
- obciążenie odnosi się do błędu, który jest wynikiem przybliżania rzeczywistego, bardzo skomplikowanego problemu znacznie prostszym modelem.

Szczegóły w podrozdziale 2.2 w "An Introduction to Statistical Learning with Applications in R" - G. James, D. Witten, T. Hastie, R. Tibshirani, Springer, 2021.

.....

Odp. b)

W odpowiedzi należało wskazać, że:

$$E\left[\left(y_0 - \hat{f}(x_0)\right)^2\right] = Var\left(\hat{f}(x_0)\right) + \left[Bias(\hat{f}(x_0))\right]^2 + Var(\varepsilon)$$

Szczegóły w podrozdziale 2.2 w "An Introduction to Statistical Learning with Applications in R" - G. James, D. Witten, T. Hastie, R. Tibshirani, Springer, 2021.

.....

Odp. c)

W odpowiedzi należało wskazać, że z reguły, wraz ze wzrostem elastyczności metod, wariancja wzrośnie, a obciążenie będzie się zmniejszało.

Szczegóły w podrozdziale 2.2 w "An Introduction to Statistical Learning with Applications in R" - G. James, D. Witten, T. Hastie, R. Tibshirani, Springer, 2021.

Rozwiązanie:

Zadanie 7.

a) (**1*p.***) Wymień co najmniej 4 czynniki, które należy wziąć pod uwagę podczas projektowania modelu.
b) (**2*p.***) Krótko opisz dwa czynniki spośród wymienionych w punkcie a).
c) (**2*p.***) Przedstaw wytyczne Krajowego Standardu Aktuarialnego w zakresie jakości danych dotyczące:
   - walidacji danych,
   - braku danych.

Odpowiedzi:

.....

Odp. a)

Zobacz np. podrozdział 3.5.2.2 w: "Actuarial Aspects of ERM for Insurance Companies", 2016.

.....

Odp. b)

Zobacz np. podrozdział 3.5.2.2 w: "Actuarial Aspects of ERM for Insurance Companies", 2016,

.....

Odp. c)

Zobacz podrozdział 2.5 w: „Krajowy Standard Aktuarialny Polskiego Stowarzyszenia Aktuariuszy – Praktyka Aktuarialna", 2022,

Zadanie 8.

a) (**1*p.***) Krótko przedstaw ideę metod bootstrapowych.
b) (**2*p.***) Przedstaw algorytm postępowania w przypadku stosowania:
   - nieparametrycznej metody bootstrapowej,
   - parametrycznej metody bootstrapowej.
c) (**2*p.***) Próba zawiera dwie obserwacje: $x_1 = 2$ i $x_2 = 4$. Wykorzystując metodę bootstrapową oblicz błąd średniokwadratowy (*mean square error*, *MSE*) nieobciążonego estymatora średniej w populacji.

Odpowiedzi:

.....

Odp. a)

Metody bootstrapowe należą do klasy metod symulacyjnych polegających na wnioskowaniu o interesującej nas wielkości na podstawie wielokrotnych replikacji oryginalnej próby. Przy czym replikacje uzyskuje się poprzez wielokrotne losowanie ze zwracaniem z próby (*bootstrap nieparametryczny*) lub założenie, że oryginalna próba pochodzi z ustalonej rodziny rozkładów, oszacowaniu jej parametrów (na podstawie oryginalnej próby), a następnie wylosowaniu z tego rozkładu replikacji (*bootstrap parametryczny*).

Szczegóły np. w podrozdziale 4. 3 w: "Statistical Foundations of Actuarial Learning and its Applications" - M.V. Wuthrich, M. Merz, 2021.

.....

Odp. b)

- Nieparametryczna metoda bootstrapowa – zobacz np. podrozdział 4.3.1 w: Statistical Foundations of Actuarial Learning and its Applications" - M.V. Wuthrich, M. Merz, 2021.
- Parametryczna metoda bootstrapowa – zobacz np. podrozdział 4.3.2 w: Statistical Foundations of Actuarial Learning and its Applications" - M.V. Wuthrich, M. Merz, 2021.

.....

Odp. c)

Średnia z oryginalnej próby: $\bar{x} = 3$

Próba	$\bar{x}_i$	$(\bar{x}_i - \bar{x})^2$
2, 2	2	1
2, 4	3	0
4, 2	3	0
4, 4	4	1
		$\sum$ 2

$$\widehat{MSE} = \frac{2}{4} = 0.5$$

Rozwiązanie:

Zadanie 9.

a) (***1p.***) Przedstaw ideę i konstrukcję wykresu prawdopodobieństwo-prawdopodobieństwo (*p-p plot*, *probability plot*). Wskaż zastosowanie tego wykresu.
b) (***2p.***) Zanotowano następujące kwoty roszczeń: 135, 29, 90, 64, 182. Dopasowano do nich rozkład wykładniczy, dla którego średnią oszacowano metodą największej wiarygodności. Skonstruuj i zinterpretuj wykres prawdopodobieństwo-prawdopodobieństwo.
c) (***2p.***) Sprawdź dopasowanie tego rozkładu (tj. rozkładu z punktu b)) testem Kołmogorowa-Smirnowa. Przyjmij poziom istotności 0.05. Wartość krytyczna dla tego poziomu istotności wynosi: $\frac{1.36}{\sqrt{n}}$.

Odpowiedzi:

.....

Odp. a)

Wykres prawdopodobieństwo-prawdopodobieństwo jest to jedna z graficznych metod oceny dopasowania modelu.
Konstrukcja:

- Wartości próbki porządkujemy w kolejności niemalejącej: $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$
- W układzie współrzędnych zaznaczamy punkty o współrzędnych $\left(\hat{F}_n(x_j),\ F(x_j)\right), j = 1,2,\ldots,$ gdzie $\hat{F}_n(x_j)$ są wartościami dystrybuanty empirycznej ($\hat{F}_n(x_j) = \frac{j}{n+1}$), a $F(x_j)$ – wartościami dystrybuanty dopasowanego rozkładu.

Model jest dobrze dopasowany, jeśli punkty te leżą blisko linii $y = x$.

Szczegóły np. w podrozdziale 15.3 w: “Loss Models: From Data to Decisions”, 5th edition - S.A. Klugman, H.H Panjer, G.E. Willmot, Wiley, 2019.

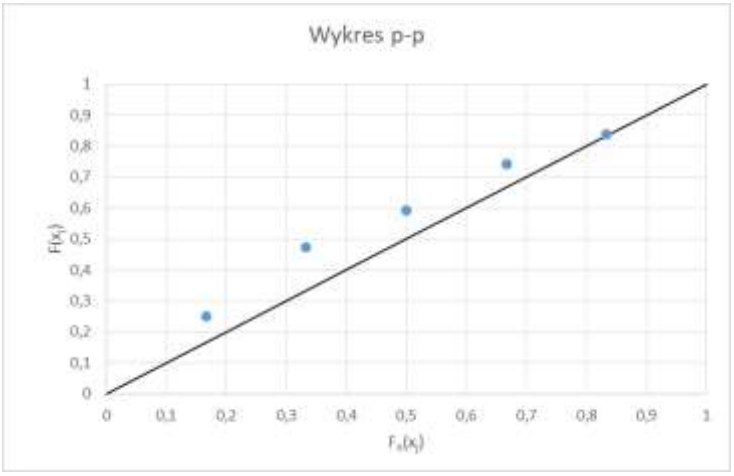
.....

Odp. b)

Dystrybuanta rozkładu wykładniczego: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0, E(X) = \frac{1}{\lambda}$

$$\hat{\lambda} = 0.01$$

j	x_j	$\hat{F}_n(x_j)$	$F(x_j)$
1	29	0.167	0.252
2	64	0.333	0.473
3	90	0.500	0.593
4	135	0.667	0.741
5	182	0.833	0.838



Na podstawie wykresu p-p możemy wstępnie przyjąć, że szkody podlegają rozkładowi wykładniczemu.

.....

Odp. c)

Statystyka: $D = \max_x |F_n(x) - F(x)|$, gdzie F_n – dystrybuanta empiryczna, F – dystrybuanta dopasowanego rozkładu.

Obliczenia pomocnicze:

j	x_j	$F_n(x_j -)$	$F_n(x_j)$	$F(x_j)$	$\lvert F_n(x_j -) - F(x_j)\rvert$	$\lvert F_n(x_j) - F(x_j)\rvert$
1	29	0	0.2	0.252	0.252	0.052
2	64	0,2	0.4	0.473	0.273	0.073
3	90	0,4	0.6	0.593	0.193	0.007
4	135	0,6	0.8	0.741	0.141	0.059
5	182	0,8	1	0.838	0.038	0.162

Stąd otrzymujemy: $D = 0.273$

Wartość krytyczna wynosi: $\frac{1.36}{\sqrt{5}} = 0.608$.

Wniosek: Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że szkody mają rozkład wykładniczy (na poziomie istotności 0.05).

Szczegóły np. w podrozdziale 15.4.1 w: “Loss Models: From Data to Decisions”, 5th edition - S.A. Klugman, H.H Panjer, G.E. Willmot, Wiley, 2019.

Rozwiązanie:

Zadanie 10.

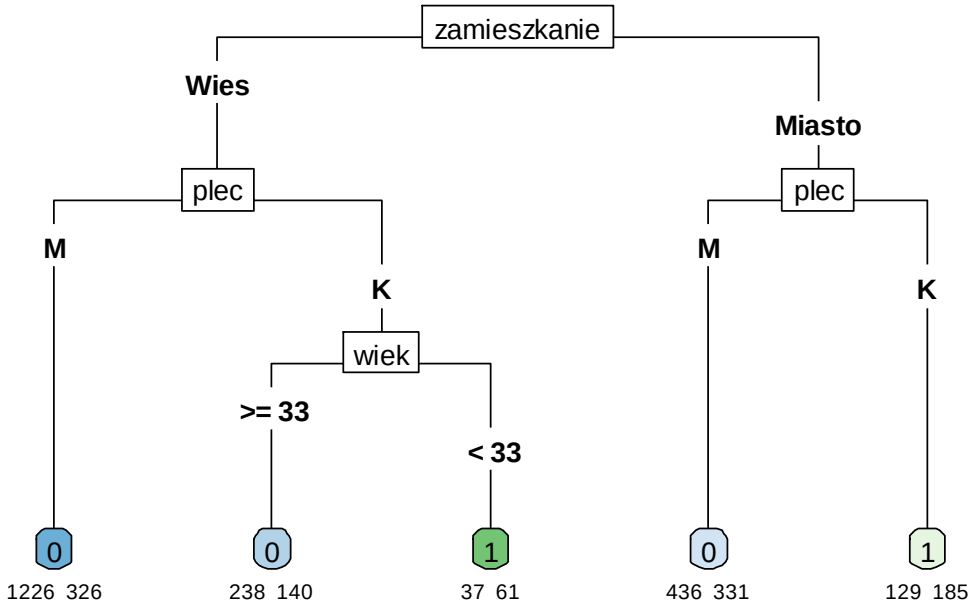
a) (**2*p.***) Krótko przedstaw algorytm budowy binarnego drzewa klasyfikacyjnego.

b) (**2*p.***) Co to jest kryterium dobroci podziału (*goodness of split criterion*) wykorzystywane w konstrukcji takiego drzewa. Omów jedno wybrane kryterium dobroci podziału.

c) (**1*p.***) Przedłużenie umowy ubezpieczenia AC (zmienna Y_i przyjmująca dwie wartości: $Y_i = 1$, gdy kierowca przedłuży umowę na kolejny rok oraz $Y_i = 0$, gdy nie przedłuży) modelowano z wykorzystaniem następujących zmiennych objaśniających:
   - *plec:* Płeć (K – kobieta, M – mężczyzna)
   - *zamieszkanie:* Miejsce zamieszkania (Miasto – miasto, Wies – wieś)
   - *wiek:* Wiek kierowcy w latach.

   W tym celu skonstruowano następujące drzewo klasyfikacyjne (Rys. 10.1):

Rys. 10.1.



Na tym drzewie liczba z lewej strony pod liściem oznacza liczbę kierowców, którzy nie przedłużyli umowy, a liczba z prawej, którzy przedłużyli. Wykorzystując to drzewo, wyznacz prawdopodobieństwo przedłużenia umowy dla dwóch kobiet w wieku poniżej 33 lat, jednej mieszkającej na wsi a drugiej w mieście.

Odpowiedzi

.....

Odp. a)

Zobacz np. w

- podrozdziale 8.1.2 w: "An Introduction to Statistical Learning with Applications in R" - G. James, D. Witten, T. Hastie, R. Tibshirani, Springer, 2021,

lub

– podrozdziale 6.3 w: “Data Analytics for Non-Life Insurance Pricing” - M.V. Wüthrich, C. Buser, 2020.

.....

Odp. b)

Zobacz np. w

– podrozdziale 8.1.2 w: “An Introduction to Statistical Learning with Applications in R” - G. James, D. Witten, T. Hastie, R. Tibshirani, Springer, 2021,

lub

– podrozdziale 6.3 w: “Data Analytics for Non-Life Insurance Pricing” - M.V. Wüthrich, C. Buser, 2020.

.....

Odp. c)

Kobieta mieszkająca na wsi: $\hat{p} = \frac{61}{37+61} = 0.622$

Kobieta mieszkająca w mieście: $\hat{p} = \frac{185}{129+185} = 0.589$

Rozwiązanie:

Sesja egzaminacyjna w dniu 24 stycznia 2023 r.

Modelowanie

Arkusz ocen

Zadanie nr	Punktacja
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	