

**Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy**

**XC Egzamin dla Aktuariuszy**

**Sesja egzaminacyjna w dniu 26 lutego 2024r.**

**Matematyka pozostałych ubezpieczeń osobowych i  
majątkowych**

**Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: .....**

**Czas trwania egzaminu: 100 minut**

**Zadanie 1.**

W pewnej grupie ubezpieczeń działu II (nie jest to grupa 14-ta) składka zarobiona oraz współczynniki szkodowości na udziale własnym w latach 2018 – 2023 wyniosły:

Rok	2018	2019	2020	2021	2022	2023
Składka zarobiona	105	110	110	115	120	120
Współczynnik szkodowości	50%	64%	62%	50%	70,5%	55%

Wypłaty odszkodowań na udziale własnym w roku 2023 wyniosły 112.

Rezerwa na wyrównanie szkodowości wyznaczona na koniec 2022 roku wyniosła 12.

Wartość rezerwy na wyrównanie szkodowości na koniec 2023 roku wynosi:

- (A) 17,3
- (B) 17,4
- (C) 17,5
- (D) 17,6
- (E) 17,7

*Uwaga: treść tego zadania została przeredagowana po egzaminie*

**Zadanie 2.**

W pewnej grupie ubezpieczeń szkodowość wykazuje w ciągu roku wahania sezonowe. Całoroczny współczynnik szkodowości rozkłada się na poszczególne kwartały w sposób następujący:

kwartał	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	$Q_4$
Udział w roku	10%	30%	50%	10%

Mamy dane o składce przypisanej w agregacji kwartalnej:

kwartał	2022, $Q_1$	2022, $Q_2$	2022, $Q_3$	2022, $Q_4$	2023, $Q_1$
Składka przypisana	170	180	200	220	200

Przyjmijmy założenia upraszczające, iż zarówno narastanie składki przypisanej jak i natężenie szkodowości w ciągu każdego z kwartałów rozkładają się równomiernie. Ponadto wiemy, że w tej grupie ubezpieczeń wystawiane są jedynie polisy roczne.

Wyznacz wartość rezerwy składki na koniec pierwszego kwartału 2023.

- (A) 410
- (B) 433
- (C) 460
- (D) 485
- (E) 514

**Zadanie 3.**

Kierowca, którego charakteryzuje wartość  $q$  parametru ryzyka  $Q$ , zgłasza szkody (jedną lub więcej) w ciągu roku z prawdopodobieństwem  $q$ , zaś nie zgłasza szkód z prawdopodobieństwem  $p = 1 - q$ , przy czym zdarzenia te w kolejnych latach są zdarzeniami niezależnymi. Jeśli kierowcę z tej populacji przypadkowo wylosujemy, to charakteryzującą go wartość parametru  $q$  traktujemy jako realizację zmiennej losowej  $Q$ . Populacja jest niejednorodna, w związku z czym  $\text{var}(Q) > 0$ .

Zakładamy, że populacja jest zamknięta (starzy kierowcy nie znikają, nowi się nie pojawiają). Kierowcy migrują pomiędzy klasami bardzo prostego, 3-klasowego systemu bonus-malus. W systemie tym każdy kierowca, który w danym roku zgłosił jedną lub więcej szkód, łąduje w roku następnym w klasie pierwszej (z najwyższą składką). Jeśli jednak nie zgłosił żadnej szkody, wtedy:

- Łąduje w klasie drugiej, o ile w danym roku był w klasie pierwszej;
- Łąduje w klasie trzeciej, o ile w danym roku był w klasie drugiej lub trzeciej.

Na podstawie obserwacji ustaliliśmy, że frakcja kierowców z tej populacji przebywających w klasie pierwszej wynosi 20%, w klasie drugiej 4%, zaś w klasie trzeciej 76%. Oczywiście pominęliśmy przy tym obserwacje z pierwszych paru lat funkcjonowania systemu bonus-malus, kiedy przynależność do klasy zależała jeszcze od klasy startowej.

Wobec tego  $\text{var}(Q)$  wynosi:

- (A) 0,12
- (B) 0,13
- (C) 0,14
- (D) 0,15
- (E) 0,16

**Zadanie 4.**

W pewnym ubezpieczeniu szkody pojawiają się zgodnie z procesem Poissona, który startuje w czasie  $T_0 = 0$ . Niech  $T_n$  oznacza czas zajścia  $n$ -tej szkody, przy czym jednostką pomiaru czasu jest rok. Szkody numerujemy według kolejności zajścia, zachodzi więc  $0 < T_1 < T_2 < T_3 < \dots$ .

Niech teraz  $\bar{T}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n T_k$  oznacza średni czas zajścia pierwszych  $n$  szkód (zmienna ta jest oczywiście określona, o ile  $n > 0$ ).

Wariancja średniego czasu zajścia pierwszych czterech szkód, pod warunkiem, że w ciągu pierwszego roku doszło właśnie do czterech szkód:

$$\text{var}(\bar{T}_4 | T_4 \leq 1 < T_5)$$

wynosi:

- (A) 1/64
- (B) 1/60
- (C) 1/56
- (D) 1/52
- (E) 1/48

**Zadanie 5.**

Rozważamy klasyczny model procesu nadwyżki ubezpieczyciela z czasem ciągłym:

- skumulowana wartość szkód  $S(t)$  jest procesem złożonym Poissona, w którym intensywność pojawiania się szkód wynosi  $\lambda = 100$ ,
- rozkład wartości pojedynczej szkody dany jest na półosi dodatniej gęstością:

$$f(x) = \frac{1}{16} \exp\left(-\frac{x}{4}\right) + \frac{3}{64} x \exp\left(-\frac{x}{4}\right)$$

- intensywność składki (napływającej w sposób ciągły) wynosi  $c = 800$ .

Wobec tego współczynnik dopasowania  $R$  wynosi:

(A)  $\frac{3+\sqrt{5}}{16}$

(B)  $\frac{3-\sqrt{5}}{16}$

(C)  $\frac{5-3\sqrt{2}}{28}$

(D)  $\frac{3-\sqrt{7}}{16}$

(E)  $\frac{3-\sqrt{5}}{28}$

**Zadanie 6.**

Pewne ryzyko generuje w kolejnych czterech kwartałach roku szkody o łącznej wartości  $X_1, X_2, X_3, X_4$ . Zmienne losowe  $X_i$  są niezależne i mają identyczny rozkład złożony, gdzie w losowej sumie losowych składników:

$$X_1 = Y_1 + \dots + Y_N,$$

liczba szkód  $N$  ma rozkład o prawdopodobieństwach danych wzorem:

$$\Pr(N = k) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

zaś wartość pojedynczej szkody ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej równej 1.

Ubezpieczyciel pokrywa łączną wartość szkód za cały rok, ceduje jednak na reasekuratora łączną wartość szkód z jednego, wybranego przez siebie kwartału (oczywiście wybierze najgorszy z nich). Jaki jest udział składki reasekuracyjnej w składce ubezpieczeniowej (obie składki policzone są według ich wartości oczekiwanej)?

- (A) 12/27
- (B) 14/27
- (C) 16/27
- (D) 17/27
- (E) 18/27

**Zadanie 7.**

Rozważamy model nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym:

$U_n = u + X_1 + X_2 + \dots + X_n$ , gdzie:

- $u$  to nadwyżka początkowa (nieujemna);
- $X_1, X_2, X_3, \dots$  są i.i.d, i reprezentują różnice pomiędzy wpływami ze składki a wydatkami na odszkodowania w kolejnych latach.

Zmienna  $X_1$  ma rozkład geometryczny przesunięty:

$$\Pr(X_1 = -1) = 1 - q,$$

$$\Pr(X_1 = 0) = (1 - q)q,$$

$$\Pr(X_1 = 1) = (1 - q)q^2,$$

$$\Pr(X_1 = 2) = (1 - q)q^3, \dots$$

Niech  $N = \min\{n: U_n < 0\}$  oznacza czas ruiny.

Przyjmijmy, że parametry procesu wynoszą:  $q = 4/10$ , oraz  $u = 7/2$ . W tych warunkach ruina jest pewna, a więc  $\Pr(N < \infty) = 1$ . Wobec tego oczekiwany czas do ruiny  $E(N)$  jest wielkością dobrze określoną, i wynosi:

(A) 16

(B) 14

(C) 12

(D) 10

(E) 8



**Zadanie 8.**

Wyjściowy portfel składa się z  $n$  niezależnych ryzyk. Łączna wartość szkód dla każdego z nich ma wartość oczekiwaną  $\mu$  i odchylenie standardowe  $\sigma$ .

$S$  oznacza łączną wartość szkód z tego portfela. Składkę za pojedyncze ryzyko skalkulowano w wysokości  $G$  tak, aby:

$\Pr(S > nG) = \varepsilon$ , (gdzie  $\varepsilon$  jest liczbą dodatnią bliższą zeru niż jedynce),  
posługując się aproksymacją normalną rozkładu zmiennej  $S$ .

Dla naszego portfela wyjściowego mamy:

$$n = 1000, \quad \mu = 10, \quad \sigma = 10.$$

Pojawiła się możliwość objęcia ubezpieczeniem dodatkowych  $n_1$  ryzyk, niezależnych nawzajem oraz niezależnych od pierwszych  $n$  ryzyk z portfela wyjściowego.

Każde z nich ma tę samą wartość oczekiwaną i wariancję:

$$\mu_1 = 10, \quad \sigma_1 = 15.$$

Jednakże warunkiem objęcia „nowych” ryzyk jest zaoferowanie pokrycia w zamian za składkę w tej samej wysokości  $G$ , co dla „starych” ryzyk.

Niech  $S_1$  oznacza łączną wartość szkód z nowych ryzyk.

Dla jakich  $n_1$  mamy:

$$\Pr(S + S_1 > (n + n_1)G) \leq \varepsilon ?$$

(Podaj warunek konieczny i dostateczny, opierając się i tym razem na aproksymacji normalnej)

- (A)  $n_1 \geq 0$
- (B)  $n_1 \geq 103$
- (C)  $n_1 \geq 250$
- (D)  $n_1 \geq 360$
- (E) nie można wyznaczyć  $n_1$  bez znajomości dokładnej wartości parametru  $\varepsilon$

**Zadanie 9.**

W procesie nadwyżki ubezpieczyciela narastanie wartości odszkodowań przebiega zgodnie z założeniami procesu złożonego Poissona, zaś składka napływa z intensywnością wyższą od wartości oczekiwanej szkód za jednostkę czasu (stosunkowy narzut bezpieczeństwa na składkę netto  $\theta$  jest dodatni). Wartość pojedynczej szkody  $Y$  jest zmienną losową o rozkładzie prawdopodobieństwa gamma  $\Gamma(\alpha, \beta)$ ,  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 3$ .

Niech  $l_1$  oznacza zmienną wyrażającą (na półosi dodatniej) spadek, jakiemu ulegnie nadwyżka po raz pierwszy, licząc od jej poziomu początkowego, o ile kiedykolwiek do takiego spadku dojdzie.

$\text{var}(l_1)$  wynosi:

- (A)  $8/27$
- (B)  $9/27$
- (C)  $12/27$
- (D)  $18/27$
- (E) żadna z powyższych, bo  $\text{var}(l_1)$  zależy od parametru  $\theta$

**Zadanie 10.**

Portfel składa się z 2000 niezależnych, identycznych ryzyk. Dla każdego z nich liczba szkód ma rozkład Poissona z parametrem częstotliwości 0.05, a wartości poszczególnych szkód są niezależnymi zmiennymi losowymi o identycznym rozkładzie jednostajnym na przedziale  $(0, 1)$ .

Uznano, iż rozkład łącznej wartości szkód z portfela ma zbyt wysoki wskaźnik skośności (stosunek trzeciego momentu centralnego do sześciangu odchylenia standardowego). Rozważa się odstąpienie reasekuratorowi nadwyżki każdej szkody z portfela ponad  $d$ .

Wskaż taką wartość  $d \in (0, 1)$ , dla której wskaźnik skośności rozkładu łącznej wartości szkód na udziale własnym wyniesie 0.1

- (A) 0.8
- (B) 0.6
- (C) 0.4
- (D) 0.2
- (E) takie  $d \in (0, 1)$  nie istnieje

---

**Egzamin dla Aktuariuszy**  
**Sesja egzaminacyjna w dniu 26 lutego 2024r.**

**Matematyka pozostałych ubezpieczeń osobowych i majątkowych**

**Arkusz odpowiedzi\***

Imię i nazwisko : .....

Pesel .....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	B	
2	E	
3	A	
4	E	
5	D	
6	D	
7	C	
8	C	
9	A	
10	E	

---

\* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna