

Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

XC Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 26 lutego 2024 r.

Matematyka finansowa

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.

Rozważmy na rynku Blacka-Scholesa akcję z ceną początkową 25, oczekiwanym zwrotem 9% rocznie i współczynnikiem zmienności 10%. Proszę znaleźć 90% przedział ufności dla ceny akcji za 6 miesięcy. Proszę podać najbliższą odpowiedź.

(A) (20.22 ; 32.30)

(B) (21.22 ; 31.30)

(C) (22.22 ; 30.30)

(D) (23.22 ; 29.30)

(E) (24.22 ; 28.30)

Zadanie 2.

Niech $T_0 = 0$. Rozważmy rynek Blacka-Scholesa. Na rynku dostępne są niepłacące dywidendy akcje \mathcal{A} o cenie $S_{T_0} = 90$ oraz europejskie opcje kupna i sprzedaży.

Inwestor, kupując lub krótko sprzedając opcje, zbudował portfel, który w chwili $T_1 = 2$ zapewni następującą wypłatę:

$$W(S_{T_1}) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } S_{T_1} < 80 \text{ lub } S_{T_1} > 160 \\ S_{T_1} - 80 & \text{gdy } S_{T_1} \geq 80 \text{ i } S_{T_1} < 120 \\ 160 - S_{T_1} & \text{gdy } S_{T_1} \geq 120 \text{ i } S_{T_1} \leq 160 \end{cases}$$

Roczna stopa wolna od ryzyka wynosi $r = 2\%$, natomiast współczynnik zmienności cen akcji równy jest $\sigma = 15\%$. Jaką wartość będzie miał parametr grecki *delta* dla tak zbudowanego portfela? Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) 0.12
- (B) 0.22
- (C) 0.32
- (D) 0.42
- (E) 0.52

Zadanie 3.

Niech $T_0 = 0$. Rozważmy rynek Blacka-Scholesa, na którym dostępne są niepłacące dywidendy akcje \mathcal{A} o cenie $S_{T_0} = 95$. Rozważmy binarną opcję kupna z funkcją wypłaty:

$$X_T = \begin{cases} \frac{S_T}{K_1} & S_T \in (K_1, K_2) \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}.$$

Proszę podać cenę dla binarnej opcji kupna w chwili T_0 , zakładając, iż $K_1 = 100$, $K_2 = 110$, $r = 5.0\%$, $\sigma = 0.2$, $T = 3$. Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) 0.02
- (B) 0.06
- (C) 0.10
- (D) 0.14
- (E) 0.18

Zadanie 4.

Rozważmy model Hestona, w którym dynamika ceny aktywa zadana jest następująco:

$$\begin{aligned}dS_t &= rS_t dt + S_t \sqrt{v_t} dW_t^1 \\dv_t &= b(\theta - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} (\rho dW_t^1 + \sqrt{(1 - \rho^2)} dW_t^2),\end{aligned}$$

gdzie:

- W_t^1 oraz W_t^2 są niezależnymi procesami Browna,
- b, θ, σ są dodatnimi stałymi,
- $\rho \in [-1; 1]$ opisuje współczynnik korelacji między S a v .

Proszę wskazać, które z poniższych równań opisuje dynamikę procesu $X_t := \log(S_t)$.

- (A) $dX_t = \left(r - \frac{1}{2}v_t\right) dt + \sqrt{v_t} dW_t^1$
- (B) $dX_t = \left(r + \frac{1}{2}v_t\right) dt + \sqrt{v_t} dW_t^1$
- (C) $dX_t = \left(r - \theta + \frac{1}{2}v_t\right) dt + b\sqrt{v_t} dW_t^1$
- (D) $dX_t = \left(r + b\theta - \frac{1}{2}v_t\right) dt + \sqrt{v_t} dW_t^1$
- (E) $dX_t = \left(r + b\theta + \frac{1}{2}v_t\right) dt + b\sqrt{v_t} dW_t^1$.

Zadanie 5.

W chwili 0, kwota K_0 została w całości zainwestowana w akcje pewnej spółki. Cena akcji tej spółki w chwili 0 wynosi S_0 . Inwestor zakłada, że cena akcji tej spółki w chwili 1 ma rozkład logarytmiczno-normalny z $ES_1 = S_0$, $Var(S_1) = 0.14 \cdot S_0^2$.

Przy tych założeniach oczekiwana wysokość straty z tej inwestycji, pod warunkiem, że nastąpi strata, wynosi (proszę podać najbliższą odpowiedź):

- (A) $0.20 K_0$
- (B) $0.25 K_0$
- (C) $0.30 K_0$
- (D) $0.35 K_0$
- (E) $0.40 K_0$

Zadanie 6.

Rozpatrujemy instrument finansowy wypłacający w chwili $t = 3$ kwotę $S_M - S_m$, gdzie S_i jest ceną akcji w chwili $t = i$, $i = 0, 1, 2, 3$, natomiast $S_M = \max(S_0, S_1, S_2, S_3)$ i $S_m = \min(S_0, S_1, S_2, S_3)$.

Inwestor wycenia instrument na drzewie dwumianowym przy następujących założeniach:

- $S_0 = 100$,
- w ciągu roku cena akcji rośnie o 30% lub spada o 10%,
- roczna intensywność oprocentowania wynosi $\delta = 11.2\%$,
- rynek nie dopuszcza arbitrażu.

Jaką cenę instrumentu otrzyma inwestor wykorzystując opisaną metodę? Proszę podać najbliższą odpowiedź.

- (A) 25
- (B) 30
- (C) 35
- (D) 40
- (E) 45

Zadanie 7.

Rozpatrzmy rynek, na którym możliwe są tylko dwa przyszłe stany: I lub II. Na tym rynku dostępne są aktywa A i B oraz dwa aktywa jednostkowe. Funkcje wypłaty opisanych aktywów, w zależności od stanu, w którym znajduje się rynek podaje tabela:

Wypłata	Aktywo A	Aktywo B	Aktywo jednostkowe stanu I	Aktywo jednostkowe stanu II
Stan I	6.00	1.00	1.00	0.00
Stan II	1.00	3.00	0.00	1.00

Wiadomo ponadto, że w chwili obecnej cena aktywów A i B jest taka sama i wynosi 2.30. Ile wynosi na tym rynku stopa wolna od ryzyka? Zakładamy, że rynek nie dopuszcza arbitrażu. Podać najbliższą odpowiedź.

- (A) 5.6%
- (B) 5.9%
- (C) 6.2%
- (D) 6.5%
- (E) 6.8%

Zadanie 8.

Kredyt jest spłacany przez $2n$ lat za pomocą równych rat w wysokości 250 na koniec każdego roku przy oprocentowaniu wynoszącym 4.94% w skali roku. Suma odsetek spłaconych w ratach 1 oraz $n + 1$ wynosi 360. Ile wynoszą odsetki w 11. racie? Proszę podać najbliższą odpowiedź.

- (A) 176.21
- (B) 179.21
- (C) 182.21
- (D) 185.21
- (E) 188.21

Zadanie 9.

Stopa wolna od ryzyka wynosi 2% (kapitalizacja ciągła), stopa dywidendy dla akcji \mathcal{A} wynosi 4.5% (kapitalizacja ciągła), a dywidendy są reinwestowane w sposób ciągły w akcje. Inwestor chce zreplikować 9 miesięczny kontrakt forward na dwadzieścia akcji \mathcal{A} zajmując krótką pozycję na rynku długu i jednocześnie kupując akcje \mathcal{A} . Ile sztuk akcji \mathcal{A} powinno znaleźć się w portfelu replikacyjnym? Proszę podać najbliższą odpowiedź.

- (A) 19.20
- (B) 19.33
- (C) 19.63
- (D) 19.70
- (E) 20.00

Zadanie 10.

Na rynku zupełnym kwotowane są m.in. następujące ceny obligacji wolnych od ryzyka:

- cena obligacji 3-letniej z rocznym kuponem 4% o nominale 10 000 zł wynosi 10 340 zł,
- cena obligacji 3-letniej z rocznym kuponem 6% o nominale 10 000 zł wynosi 10 910 zł,
- cena zerokuponowej obligacji 2-letniej o nominale 10 000 zł wynosi 9 550 zł.

Wyemitowano 2-letnią obligację z rocznym kuponem 9% o nominale 10 000 zł. Na koniec drugiego okresu emitent obligacji może zbankrutować z prawdopodobieństwem 20%, wówczas nominal nie zostanie spłacony (na koniec 1 okresu prawdopodobieństwo bankructwa wynosi 0%). Jednocześnie na rynku skwotowano produkt pochodny credit default swap (CDS), z którego wypłata wynosi 1 000 zł na koniec drugiego okresu, jeśli emitent ww. obligacji zbankrutuje lub 0 zł jeśli do bankructwa nie dojdzie. Cena tego kontraktu wynosi 170 zł. Ile powinna wynosić cena ww. obligacji 2-letniej obarczonej ryzykiem w przypadku braku arbitrażu? Proszę podać najbliższą odpowiedź.

- (A) 9 334
- (B) 9 434
- (C) 9 534
- (D) 9 634
- (E) 9 734

Dystrybuanta rozkładu normalnego $N(0,1)$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 26 lutego 2024 r.

Matematyka finansowa

Arkuszu odpowiedzi*

Imię i nazwisko :

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	D	
2	E	
3	C	
4	A	
5	B	
6	D	
7	A	
8	D	
9	B	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.