Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXXVIII Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 12 czerwca 2023r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej ....

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.

Wybieramy dwie liczby X oraz Y niezależnie z rozkładem jednostajnym ze zbioru $\{1,2,\ldots,n^2\}$. Prawdopodobieństwo tego, że $X+Y$ jest liczbą kwadratową (tzn. jest postaci k^2 dla jakiegoś k) dla każdego $n \geq 4$ wyraża się wzorem:

(A) $\dfrac{2n+3}{6n^2}$

(B) $\dfrac{2n^2+3n+5}{6n^3}$

(C) $\dfrac{2n^3+3n^2-5n-6}{6n^4}$

(D) $\dfrac{2n^2+3n-5}{6n^3}$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 2.

Ciąg $X_1, X_2, \ldots, X_n, n \geq 1$ jest ciągiem niezależnym zmiennych losowych o rozkładzie normalnym o średniej $\mu = 25$ oraz wariancji $\sigma^2 = 4$. Zdefiniujmy

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

Wiadomo, że wariancja Y wynosi 6.
Ile wynosi n?

(A) $n = 4$

(B) $n = 5$

(C) $n = 6$

(D) $n = 7$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 3. Zaobserwowano niezależną próbkę $x_1,\dots,x_{10}$ pochodzącą z rozkładu o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2\theta^3}\exp\left(-\dfrac{x}{\theta}\right) & x \geq 0 \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

z parametrem $\theta > 0$. Z tej próbki wyliczono estymator największej wiarogodności $\hat{\theta}$ parametru θ otrzymując wartość $\hat{\theta} = 3/2$. Wiadomo również, że suma wszystkich obserwacji oprócz pierwszej wynosi 40 (tzn. $x_2 + \ldots + x_{10} = 40$).

Ile wynosiła obserwacja x_1?

(A) 3

(B) 4

(C) 5

(D) 6

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 4. W pierwszym kroku, z odcinka $(0,10)$ wybieramy losowo (jednostajnie) punkt X_1, w drugim kroku z odcinka $(0,X_1)$ wybieramy losowo (jednostajnie) punkt X_2, w trzecim kroku z odcinka $(0,X_2)$ wybieramy losowo (jednostajnie) punkt X_3, itd. W n-tym kroku wyberamy losowo punkt X_n, załóżmy, że $n \geq 4$. Dla liczby całkowitej $k \geq 3$ oznaczmy $Y = X_n^k$.

Ile wynosi $\dfrac{\sqrt{\operatorname{Var} Y}}{\mathbb{E} Y}$?

(A) $\sqrt{\left(\dfrac{k^2}{2k+1}+1\right)^n - 1}$

(B) $\dfrac{k^n}{\sqrt{(2k+1)^n}}$

(C) $\dfrac{k^n}{(k+1)^n}$

(D) $\sqrt{\left(\dfrac{k^2}{2k+1}+1\right)^n - k}$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 5.
Rzucamy sześcienną symetryczną kostką do chwili, aż otrzymamy wynik 6. Jaka jest średnia liczba rzutów (łącznie z ostatecznym wyrzuceniem sześciu oczek) pod warunkiem, że wyniki wszystkich rzutów były liczbami parzystymi?

(A) 4

(B) 3

(C) 2

(D) 1.5

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 6.

Niezależne zmienne losowe X, Y mają ten sam rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 1, tj. o gęstości $f(t) = e^{-t}$ dla $t > 0$. Określmy $S = X + Y$. Niech $f_{X|S=s}(x)$ oznacza gęstość warunkowej zmiennej losowej X pod warunkiem, że $S = s > 0$ (zauważmy, że ta warunkowa zmienna losowa przyjmuje wartości z przedziału $(0, s)$).

Jaka jest wariancja tej warunkowej zmiennej losowej?

(A) $\frac{1}{4}s^2$

(B) $\frac{1}{4}s$

(C) $\frac{1}{2}s$

(D) $\frac{1}{2}s^2$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 7. Rzucamy n razy symetryczną 6-ścienną kostką do gry. Niech A oznacza zdarzenie:

$$\{\text{wśród } n \text{ rzutów szóstka wypadła inną liczbę razy niż } 1\}.$$

(innymi słowy, szóstka wypadła 2,3,4,5,6 razy lub w ogóle).

Dla jakiego n prawdopodobieństwo zdarzenia A jest najmniejsze?

(A) 2

(B) 4

(C) 5 lub 6 (i wówczas jest ono takie samo)

(D) 7 lub 8 (i wówczas jest ono takie samo)

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 8.

Mamy ciąg zmiennych losowych $X_1, \ldots, X_n, n \geq 4$ takich, że $EX_i = i, VarX_i = 1, i = 1, \ldots, n$ oraz $Cov(X_i, X_j) = 1$ dla $i \neq j$. Zmienne losowe $I_1, \ldots, I_n$ są wzajemnie niezależne, są też niezależne od ciągu $X_1, \ldots, X_n$, i mają rozkład $P(I_i = 0) = P(I_i = 2) = 1/2$. Oblicz $Var\left(\sum_{i=1}^{n} I_i X_i\right)$.

(A) $\dfrac{n(n-1)(2n+5)}{6}$

(B) $\dfrac{n(n+1)(2n+3)}{6}$

(C) $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(D) $\dfrac{n(n+1)(2n+7)}{6}$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 9.
Zmienna losowa X ma dystrybuantę

$$F(t) = \mathbb{P}(X \le t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0, \\ \frac{1}{2}t & \text{dla } t \in [0,1), \\ 1 & \text{dla } t \ge 1. \end{cases}$$

Ile wynosi $\mathrm{Var}(F(X))$?

(A) $\frac{5}{48}$

(B) $\frac{1}{12}$

(C) $\frac{1}{6}$

(D) $\frac{29}{48}$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 10.

Pobieramy próbkę niezależnych obserwacji zmiennych losowych o rozkładzie geometrycznym z parametrem $p \in (0,1)$ o rozkładzie

$$\mathbb{P}(X=k) = (1-p)^k p, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

Nasz sposób pobierania próbki nie daje możliwości zaobserwowania wartości zero. Próbka została pobierana do czasu, aż zebrano T niezerowych obserwacji $X_1, X_2, \ldots, X_T$ (czyli każdy $X_i \geq 1, i = 1, \ldots, T$). Nie mamy żadnej informacji o tym ile było obserwacji zerowych. Średnia zebranej próbki wynosi

$$\bar{X} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} X_i.$$

Estymator $\hat{p}$ parametru p uzyskany metodą największej wiarogodności podany jest wzorem:

(A) $\dfrac{1}{\frac{T}{T-1}\bar{X}}$

(B) $\dfrac{1}{1+\frac{T}{T-1}\bar{X}}$

(C) $\dfrac{1}{\bar{X}}$

(D) $\dfrac{1}{1+\bar{X}}$

(E) Żadne z powyższych

z	**+0.00**	**+0.01**	**+0.02**	**+0.03**	**+0.04**	**+0.05**	**+0.06**	**+0.07**	**+0.08**	**+0.09**
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7793	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Dystrybuanta standardowego rozkładu normalnego $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

$$\Phi(z) = \mathbb{P}(Z \leq z)$$

Uwaga: Dla $z < 0, \Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$.

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 12 czerwca 2023r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	E	
2	A	
3	C	
4	A	
5	D	
6	E	
7	C	
8	D	
9	E	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.