

**Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy**

**LXXXVIII Egzamin dla Aktuariuszy**

**Sesja egzaminacyjna w dniu 12 czerwca 2023r.**

**Matematyka finansowa**

**Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: .....**

**Czas trwania egzaminu: 100 minut**

**Zadanie 1.**

Rozważmy akcję  $\mathcal{A}$ , której bieżąca cena wynosi  $S_0 = 40$ . Akcja wypłaca kwartalne dywidendy w kwocie 0.50. Dwie najbliższe wypłaty planowane są w chwilach  $T_1 = 1.5$  oraz  $T_2 = 4.5$ . Zakładając, że roczna stopa wolna od ryzyka wynosi 3%, proszę określić 3-miesięczną cenę *forward* na akcję  $\mathcal{A}$  (proszę podać najbliższą wartość).

- (A) 39.75
- (B) 39.80
- (C) 39.85
- (D) 39.90
- (E) 39.95

**Zadanie 2.**

Rozważmy akcję  $\mathcal{A}$ , której cena w chwili  $T_0 = 0$  wynosi 80. Do wyceny pewnego instrumentu pochodnego analitycy wykorzystują drzewo dwumianowe o kroku 0.5 roku. W procesie wyceny przyjęto, iż:

- w pierwszym okresie cena akcji wzrośnie do 100 (scenariusz U) lub spadnie do 70 (scenariusz D);
- jeśli w chwili  $T_1 = 0.5$  zrealizuje się scenariusz U, to wówczas w kolejnym półroczu cena akcji wzrośnie do 130 lub spadnie do 90. W pierwszym przypadku wypłata z wycenianego instrumentu pochodnego wyniesie 15, w drugim zaś równa będzie 4.
- jeśli w chwili  $T_1 = 0.5$  zrealizuje się zaś scenariusz D, to wówczas w kolejnym półroczu cena akcji wzrośnie do 90 lub spadnie do 60. Wypłaty z wycenianego instrumentu pochodnego wynosić będą wówczas odpowiednio 4 oraz 1.

Założmy, że stopa wolna od ryzyka wynosi 3% w kroku półrocznym.

Inwestorzy chcą zastosować strategię, która poprzez inwestowanie w akcję i instrument wolny od ryzyka pozwoli im zreplikować wypłatę z opcji w każdym z węzłów drzewa dwumianowego (dopuszczamy pożyczanie środków). Niech  $C$  będzie kwotą, jaką inwestor musi zainwestować na początku, aby zastosować strategię replikującą. Przez  $(x_0)$  oznaczmy natomiast ilość akcji w portfelu replikującym w chwili 0. Wówczas (proszę podać najbliższą odpowiedź):

(A)  $(C; x_0) = (4.17; 0.17)$

(B)  $(C; x_0) = (4.27; 0.27)$

(C)  $(C; x_0) = (4.37; 0.37)$

(D)  $(C; x_0) = (4.47; 0.47)$

(E)  $(C; x_0) = (4.57; 0.57)$

**Zadanie 3.**

Założmy, że proces  $X$  zadany jest następującym równaniem:

$$dX_t = -X_t dt + dW_t.$$

Niech  $Y_t = (X_t)^2$ . Proszę określić, które równanie opisuje dynamikę procesu  $Y_t$ .

(A)  $dY_t = (1 + 2Y_t)dt + 2\sqrt{Y_t}dW_t$

(B)  $dY_t = (1 + Y_t)dt + 2\sqrt{Y_t}dW_t$

(C)  $dY_t = (1 + 2Y_t)dt - 2\sqrt{Y_t}dW_t$

(D)  $dY_t = (1 - 2Y_t)dt - 2\sqrt{Y_t}dW_t$

(E)  $dY_t = (1 - 2Y_t)dt + 2\sqrt{Y_t}dW_t$

**Zadanie 4.**

Rozważmy dwuwymiarowy proces Browna  $W = (W^A, W^B)$ , dla którego współczynnik korelacji wynosi  $\rho_{AB}$ .

Skonstruowany został portfel złożony z dwóch skorelowanych akcji  $S^A$  oraz  $S^B$  o dynamikach:

$$\begin{aligned}dS_t^A &= \mu_A S^A dt + \sigma_A S^A dW_t^A, \\dS_t^B &= \mu_B S^B dt + \sigma_B S^B dW_t^B.\end{aligned}$$

gdzie  $\mu_A, \mu_B, \sigma_A, \sigma_B$  są stałymi.

Niech  $g(x, y) = x^2 y$ . Zdefiniujmy  $S^C = g(S^A, S^B)$ . Wówczas:

- (A)  $dS_t^C = (2\mu_A + \mu_B + (\sigma_A)^2 + 2\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B)S_t^C dt + 2\sigma_A S^C dW_t^A + \sigma_B S^C dW_t^B$
- (B)  $dS_t^C = (\mu_A + 2\mu_B + (\sigma_B)^2 + \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B)S_t^C dt + \sigma_A S^C dW_t^A + \sigma_B S^C dW_t^B$
- (C)  $dS_t^C = (\mu_A + \mu_B + (\sigma_A)^2 + 2\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B)S_t^C dt + \sigma_A S^C dW_t^A + 2\sigma_B S^C dW_t^B$
- (D)  $dS_t^C = (2\mu_A + \mu_B + (\sigma_A)^2 + 2\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B)S_t^C dt + \sigma_A S^C dW_t^A + 2\sigma_B S^C dW_t^B$
- (E)  $dS_t^C = (2\mu_A + \mu_B + (\sigma_A)^2 + \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B)S_t^C dt + \sigma_A S^C dW_t^A + \sigma_B S^C dW_t^B$

**Zadanie 5.**

Założmy, że inwestor obserwuje następujące ceny akcji  $\mathcal{A}$  na koniec poszczególnych giełdowych dni sesyjnych (zakładając 250 dni sesyjnych w ciągu roku):

Dzień	1	2	3	4	5	6
S	10.0	10.5	11.0	11.5	12.0	11.5

Wykorzystując powyższe informacje o zmienności ceny akcji  $\mathcal{A}$ , inwestor, korzystając z założeń modelu Blacka-Scholesa, wyznacza na koniec szóstego dnia sesyjnego cenę opcji kupna na akcję  $\mathcal{A}$ , zapadającej za rok, o cenie wykonania 12. Przyjmując, że stopa wolna od ryzyka  $r = 3\%$ , proszę określić cenę opcji (proszę podać najbliższą odpowiedź).

- (A) 2.16
- (B) 2.36
- (C) 2.56
- (D) 2.76
- (E) 2.96

**Zadanie 6.**

Polski inwestor planuje zakup 1 000 USD za 4 miesiące. Decyduje się na zakup 4-miesięcznej walutowej opcji kupna z ceną wykonania 4.5 PLN/USD. Wiemy, że stopa wolna od ryzyka w Polsce wynosi 4%, podczas gdy w Stanach Zjednoczonych równa jest 5%. Wiemy, że zmienność kursu wynosi 15%, a bieżący kurs to 4.4 PLN/USD. Proszę określić cenę opcji, która pozwoli zabezpieczyć płatność 1 000 USD za 4 miesiące. Proszę podać najbliższą wartość:

- (A) 92.5
- (B) 95.5
- (C) 98.5
- (D) 101.5
- (E) 104.5

**Zadanie 7.**

W dniu 31 grudnia 2022 inwestor kupuje na rynku pierwotnym 4-letnią obligację po cenie 1 000 PLN. Nominał obligacji wynosi 1 000 PLN, zaś stałe kupony płatne są na koniec każdego roku. Strukturę czasową stóp procentowych na dzień 31 grudnia 2022 opisuje krzywa stóp *spot* (krzywa zerokuponowa):

$$s_n = \frac{1}{100} \frac{11n - 8}{2n - 1}, n = 1, 2, 3 \dots$$

gdzie  $s_n$  oznacza  $n$ -letnią stopę *spot*.

Proszę wyznaczyć stopę kuponu tej obligacji (proszę podaj najbliższą wartość).

- (A) 4.5%
- (B) 4.7%
- (C) 4.9%
- (D) 5.1%
- (E) 5.3%



**Zadanie 8.**

Który z poniższych portfeli opcji pozwoli na zreplikowanie wypłaty  $X_T$  opartej o cenę akcji  $S_T$ :

$$X_T = \max\{K - |0.25S_T - K| - 1.25|S_T - K|; 0\}.$$

- (A) sprzedaż 1.5 europejskich opcji call z datą wygaśnięcia za T lat i z ceną strike  $5K/6$ ,  
kupno 2.5 europejskich opcji call z datą wygaśnięcia za T lat i z ceną strike K,  
sprzedaż 1.5 europejskiej opcji call z datą wygaśnięcia za T lat i z ceną strike  $1.25K$ .
- (B) sprzedaż 1.5 europejskich opcji call z datą wygaśnięcia za T lat i z ceną strike  $5K/6$ ,  
kupno 2.5 europejskich opcji call z datą wygaśnięcia za T lat i z ceną strike K,  
sprzedaż 1 europejskiej opcji call z datą wygaśnięcia za T lat i z ceną strike  $1.25K$ .
- (C) kupno 1.5 europejskich opcji call z datą wygaśnięcia za T lat i z ceną strike  $5K/6$ ,  
sprzedaż 2.5 europejskich opcji call z datą wygaśnięcia za T lat i z ceną strike K,  
kupno 2 europejskiej opcji call z datą wygaśnięcia za T lat i z ceną strike  $1.25K$ .
- (D) kupno 1.5 europejskich opcji call z datą wygaśnięcia za T lat i z ceną strike  $5K/6$ ,  
sprzedaż 2.5 europejskich opcji call z datą wygaśnięcia za T lat i z ceną strike K,  
kupno 1.5 europejskiej opcji call z datą wygaśnięcia za T lat i z ceną strike  $1.25K$ .
- (E) kupno 1.5 europejskich opcji call z datą wygaśnięcia za T lat i z ceną strike  $5K/6$ ,  
sprzedaż 2.5 europejskich opcji call z datą wygaśnięcia za T lat i z ceną strike K,  
kupno 1 europejskiej opcji call z datą wygaśnięcia za T lat i z ceną strike  $1.25K$ .

**Zadanie 9.**

W dniu 1 lipca 2022 roku bank udzielił kredytu w wysokości 70 000, który będzie spłacany przez 24 lata za pomocą renty płatnej kwartalnie z dołu. Kwartalna rata wzrasta o 150 co cztery lata. Roczna stopa procentowa z kapitalizacją kwartalną wynosi 8%. Ile wynoszą odsetki w 54 racie kredytu?

- (A) 1 111
- (B) 1 121
- (C) 1 131
- (D) 1 141
- (E) 1 151

**Zadanie 10.**

Cena akcji  $X_t$  jest modelowana za pomocą modelu log-normalnego, tj.

$$\log\left(\frac{S_t}{S_s}\right) \sim N((\mu - 0,5\sigma^2)(t - s); \sigma^2(t - s)).$$

W chwili  $t = 0$  cena akcji wynosi 200 zł. W chwili  $t = 2$  oczekiwana cena akcji wynosi  $200 \exp(0.7)$  zł, a wariancja ceny wynosi  $40\,000 \exp(-0.7)$  zł. Jaka jest wartość parametru  $\sigma$  modelu log-normalnego?

- (A) 0.20
- (B) 0.22
- (C) 0.24
- (D) 0.26
- (E) 0.28

**Dystrybuanta rozkładu normalnego  $N(0,1)$** 

<b>z</b>	<b>0.00</b>	<b>0.01</b>	<b>0.02</b>	<b>0.03</b>	<b>0.04</b>	<b>0.05</b>	<b>0.06</b>	<b>0.07</b>	<b>0.08</b>	<b>0.09</b>
<b>0.0</b>	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
<b>0.1</b>	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
<b>0.2</b>	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
<b>0.3</b>	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
<b>0.4</b>	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
<b>0.5</b>	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
<b>0.6</b>	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
<b>0.7</b>	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
<b>0.8</b>	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
<b>0.9</b>	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
<b>1.0</b>	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
<b>1.1</b>	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
<b>1.2</b>	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
<b>1.3</b>	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
<b>1.4</b>	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
<b>1.5</b>	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
<b>1.6</b>	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
<b>1.7</b>	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
<b>1.8</b>	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
<b>1.9</b>	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
<b>2.0</b>	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
<b>2.1</b>	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
<b>2.2</b>	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
<b>2.3</b>	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
<b>2.4</b>	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
<b>2.5</b>	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
<b>2.6</b>	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
<b>2.7</b>	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
<b>2.8</b>	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
<b>2.9</b>	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
<b>3.0</b>	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
<b>3.1</b>	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
<b>3.2</b>	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
<b>3.3</b>	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
<b>3.4</b>	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
<b>3.5</b>	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
<b>3.6</b>	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
<b>3.7</b>	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
<b>3.8</b>	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
<b>3.9</b>	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

**Egzamin dla Aktuariuszy**  
**Sesja egzaminacyjna w dniu 12 czerwca 2023r.**

**Matematyka finansowa**

**Arkuszu odpowiedzi\***

Imię i nazwisko : .....

Pesel .....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	B	
2	A	
3	E	
4	A	
5	D	
6	D	
7	D	
8	E	
9	D	
10	C	

\* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.