Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXXVII Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 23 stycznia 2023r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej ....

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.

Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym $\mathcal{U}[0, \pi/2)$, a Y o rozkładzie standardowym jednostajnym $\mathcal{U}[0, 1)$. Zakładamy, że X i Y są niezależne. Zdefiniujmy:

$$Z = \begin{cases} X & \text{jeśli} \quad Y < \sin^2 X, \\ \pi/2 + X & \text{jeśli} \quad Y > \sin^2 X. \end{cases}$$

Zmienna Z przyjmuje wartości ze zbioru $(0, \pi)$ i ma gęstość

(A) $f(z) = \frac{1}{2} \sin z$

(B) $f(z) = \frac{2}{\pi} \cos^2 z$

(C) $f(z) = \frac{2}{\pi} \sin^2 z$

(D) $f(z) = \frac{3}{4\pi} \sin^3 z$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 2.

Ciąg $X_0, X_1, X_2, \ldots$ jest ciągiem niezależnym zmiennych losowych o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1. Zdefiniujmy:

$$N = \min_{n \geq 1} \{X_n < X_0\},$$

tzn. N jest numerem pierwszej ze zmiennych $X_1, X_2, \ldots$ o wartości mniejszej niż X_0. Ile wynosi $\mathbb{E}N$?

(A) ∞

(B) 2

(C) $\frac{3}{2}$

(D) $\frac{2}{3}$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 3.
Niezależne obserwacje $X_1, \ldots, X_n$ pochodzą z rozkładu o nieznanej średniej μ i znanej wariancji 4, liczba obserwacji n jest duża (zachodzi centralne twierdzenie graniczne). Testujemy hipotezę $H_0 : \mu = 1$ przeciw hipotezie alternatywnej $H_1 : \mu > 1$ używając testu opartego na średniej próbkowej $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ z obszarem krytycznym $\bar{X} > t$.

Dla której z par n i t prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy H_0 w przypadku, gdy $\mu = 0.9$ wynosi w przybliżeniu 0.05, a prawdopodobieństwo nie odrzucenia H_0 w przypadku, gdy $\mu = 1.2$ wynosi w przybliżeniu 0.1?

(A) $n = 825, \quad t = 1.095$

(B) $n = 625, \quad t = 1.095$

(C) $n = 200, \quad t = 1.022$

(D) $n = 382, \quad t = 1.069$

(E) $n = 550, \quad t = 1.805$

Zadanie 4.

Zmienna losowa Y ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda > 0$, ale wiadomo, że nie może być równa 1 (innymi ma warunkowy rozkład Poissona, pod warunkiem, że $Y \neq 1$).

Ile wynosi $\mathbb{E}Y$?

(A) $\dfrac{\lambda(1-e^{-2\lambda})}{1-e^{-\lambda}}$

(B) $\dfrac{\lambda(e^{\lambda}-e^{-\lambda})}{e^{\lambda}-\lambda}$

(C) $\dfrac{\lambda(e^{\lambda}-1)}{e^{\lambda}-\lambda}$

(D) $\dfrac{\lambda(e^{2\lambda}-1)}{e^{\lambda}-\lambda}$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 5.

X_1, X_2, X_3 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach wykładniczych z wartościami oczekiwanymi $\mathbb{E}X_i = \frac{1}{i}, i = 1,2,3.$

Zdefiniujmy $T = \max(X_1, \min(X_2, X_3))$. Ile wynosi $\mathbb{E}T$?

(A) $\frac{31}{30}$

(B) $\frac{27}{30}$

(C) $\frac{9}{10}$

(D) $\frac{11}{10}$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 6.

Wektor losowy $(X,Y)^T$ ma dwuwymiarowy rozkład normalny $N(\mu,\Sigma)$ z parametrami

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Ile wynosi $\mathbb{E}\left(X^2Y^2\right)$?

(A) 36

(B) 18

(C) 39

(D) 27

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 7.
Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n, n \geq 6$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta} x} & \text{dla } x \geq 0, \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

z nieznanym parametrem $\theta > 0$. Obserwujemy wartości

$$Y_i = \lceil X_i \rceil, \quad i = 1, \ldots, n$$

(gdzie $\lceil x \rceil$ oznacza najmniejszą liczbę całkowitą m taką, że $m \geq x$).
Oznaczmy $S = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Estymator największej wiarogodności parametru θ oparty na obserwacjach $Y_1, \ldots, Y_n$ podany jest wzorem:

(A) $\left(\ln \left(\frac{S}{S-n} \right) \right)^{-1}$

(B) $-\ln \left(\frac{S}{S+n} \right)$

(C) $\left(\ln \left(\frac{nS}{S-n} \right) \right)^{-1}$

(D) $-\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2S}{S+n} \right)$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 8.

Wykonano $n \geq 7$ niezależnych prób Bernoulliego z parametrem sukcesu $p \in (0,1)$. Oznaczmy liczbę sukcesów w tych próbach przez X. Rozważono estymator parametru p postaci

$$\hat{p} = \alpha X, \qquad \alpha > 0,$$

a następnie wyliczono, że błąd średniokwadratowy $\text{MSE}(\hat{p}) = \mathbb{E}\,(\hat{p} - p)^2$ był najmniejszy dla $\alpha = \dfrac{1}{2(n-1)}$. Ile wynosi parametr p?

(A) $\dfrac{1}{n-1}$

(B) $\dfrac{1}{2(n-1)}$

(C) $\dfrac{2}{n+1}$

(D) $\dfrac{2}{n}$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 9.
Zmienna losowa X ma dystrybuantę

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0, \\ t^2 & \text{dla } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ \frac{1}{4} & \text{dla } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right), \\ 1 - \frac{3}{4}e^{1-t} & \text{dla } t \geq 1. \end{cases}$$

Ile wynosi $\mathrm{Var}(F(X))$?

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{1}{12}$

(C) $\frac{1}{6}$

(D) 1

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 10.

Dwie niezależne zmienne losowe $X_k, k = 1,2$ mają rozkłady o gęstości

$$f_k(x) = \begin{cases} \dfrac{2+k}{(1+x)^{3+k}} & \text{dla } x \geq 0, \\ 0 & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Rozważmy zmienną losową

$$T = \frac{\ln(1+X_1)}{\ln(1+X_2)}$$

Ile wynosi $\mathbb{P}(T < 1)$?

(A) $\frac{1}{3}$

(B) $\frac{3}{7}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{5}{9}$

(E) Żadne z powyższych

z	**+0.00**	**+0.01**	**+0.02**	**+0.03**	**+0.04**	**+0.05**	**+0.06**	**+0.07**	**+0.08**	**+0.09**
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7793	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Dystrybuanta standardowego rozkładu normalnego $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

$$\Phi(z) = \mathbb{P}(Z \leq z)$$

Uwaga: Dla $z < 0, \Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$.

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 23 stycznia 2023r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	C	
2	A	
3	D	
4	C	
5	A	
6	C	
7	A	
8	A	
9	B	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.