Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXXIV Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 11 kwietnia 2022.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej ....

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.

Losujemy dwa punkty $P^{(1)} = (X^{(1)}, Y^{(1)})$ oraz $P^{(2)} = (X^{(2)}, Y^{(2)})$ jednostajnie z kwadratu jednostkowego, tzn. $X^{(1)}, Y^{(1)}, X^{(2)}, Y^{(2)}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym $\mathcal{U}(0,1)$. Następnie z tych punktów tworzymy prostokąt $\mathtt{rect}(P^{(1)}, P^{(2)})$ o wierzchołkach:

$$V_1 = \left(\min(X^{(1)}, X^{(2)}), \min(Y^{(1)}, Y^{(2)})\right), \quad V_2 = \left(\min(X^{(1)}, X^{(2)}), \max(Y^{(1)}, Y^{(2)})\right),$$

$$V_3 = \left(\max(X^{(1)}, X^{(2)}), \max(Y^{(1)}, Y^{(2)})\right), \quad V_4 = \left(\max(X^{(1)}, X^{(2)}), \min(Y^{(1)}, Y^{(2)})\right).$$

Niech Z oznacza pole prostokąta $\mathtt{rect}(P^{(1)}, P^{(2)})$. Ile wynosi EZ?

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{1}{9}$

(C) $\frac{1}{18}$

(D) $\frac{1}{10}$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 2.

Zmienne losowe X oraz Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o gęstościach $f_{\theta_1}(\cdot)$ oraz $f_{\theta_2}(\cdot)$, gdzie

$$f_\theta(t) = \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{t-\theta}{\theta}\right), \quad t > \theta > 0.$$

Załóżmy, że $\theta_2 > \theta_1 > 0$. Zdefiniujmy $Z := \frac{Y}{X}$. Ile wynosi $P(Z > 1)$?

(A) $\frac{\theta_1}{\theta_2}$

(B) $\frac{\theta_2}{\theta_1 + \theta_2} \exp\left(-\frac{\theta_2 - \theta_1}{\theta_1}\right)$

(C) $\frac{\theta_2}{\theta_1 + \theta_2} \exp\left(-\frac{\theta_2 - \theta_1}{\theta_1}\right)$

(D) $1 - \frac{\theta_1}{\theta_1 + \theta_2} \exp\left(-\frac{\theta_2 - \theta_1}{\theta_1}\right)$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 3.
Załóżmy, że $X_1,\ldots,X_n$ są niezależnymi obserwacjami z rozkładu z parametrami $\alpha > 0, \lambda > 0$ o gęstości

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha}(x-1)^{\alpha-1}e^{-\lambda(x-1)},\ x \geq 1,$$

gdzie $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-x}dx.$

Z otrzymanej próbki policzono średnią $\bar{X}$ oraz wariancję próbkową $\hat{S}^2$. Na podstawie tej próbki skontruowano estymatory parametrów λ, α metodą momentów (tj. przyrównano wartość średnią rozkładu o gęstości f do średniej próbkowej oraz wariancję tego rozkładu do wariancji próbkowej). Wartości tak powstałych estymatorów to

(A) $\hat{\lambda} = \frac{\hat{X}-1}{\hat{S}^2}, \quad \hat{\alpha} = \frac{(\hat{X}-1)^2}{\hat{S}^2}$

(B) $\hat{\lambda} = \frac{\hat{X}}{\hat{S}^2}, \quad \hat{\alpha} = \frac{\hat{X}^2}{\hat{S}^2}$

(C) $\hat{\lambda} = \frac{\hat{X}}{\hat{S}^2}, \quad \hat{\alpha} = \frac{(\hat{X}-1)^2}{\hat{S}^2}$

(D) $\hat{\lambda} = \frac{\hat{X}-1}{\hat{S}^2}, \quad \hat{\alpha} = \frac{\hat{X}^2}{\hat{S}^2}$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 4.

Niech $Y_1, \ldots, Y_8$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie o gęstości f, o której zakładamy, że jest ściśle dodatnia na całej prostej. Testujemy hipotezę:

H_0: f jest symetryczna, tzn. $f(-x) = f(x)$
vs.
H_1 f nie jest symatryczna.

Niech T oznacza liczbę elementow w ciągu $Y_1, \ldots, Y_8$, które mają wartości dodatnie. Odrzucamy hipotezę H_0, gdy $T < 2$ lub $T > 6$. Jaki jest rozmiar takiego testu?

(A) $\frac{119}{128}$

(B) $\frac{15}{64}$

(C) $\frac{17}{64}$

(D) $\frac{17}{256}$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 5.

Mówimy, że $(X_1,\ldots,X_k)$ ma rozkład wielomianowy $M(n,p_1,\ldots,p_k)$, gdzie $n>0$ to liczba naturalna, $p_i \geq 0, i=1,\ldots,k, \sum_{i=1}^{k} p_i = 1$, jeśli

$$P(X_1=x_1,\ldots,X_k=x_k) = \frac{n!}{x_1!x_2!\cdots x_k!} p_1^{x_1}\cdots p_k^{x_k}$$

dla $x_i \in \{0,\ldots,n\}, i=1,\ldots,k$ takich, że $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$.
W modelu Hardy'ego-Weinberga wektor (X_1,X_2,X_3) ma rozkład wielomianowy

$$M(n,\theta^2,2\theta(1-\theta),(1-\theta)^2)$$

z pewnym parametrem $\theta \in (0,1)$.
Zdefiniujmy $T = X_1+X_2$. Ile wynosi ET?

(A) $\frac{\theta}{(2-\theta)}n$

(B) $\frac{\theta}{(1-\theta)^2}n$

(C) $\theta(2-\theta)n$

(D) $\theta(1-\theta)n$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 6.

Studenci pisali egzamin w dwóch salach, w sali A i sali B. W sali A egzamin pisały 42 osoby, średnia punktów wyniosła 50, a odchylenie standardowe 4. Natomiast w sali B egzamin pisało 30 osób, średnia punktów wyniosła 62, a odchylenie standardowe 5.

Ile wynosi odchylenie standardowe całej (połączonej) grupy 72 osób? Wskaż najbliższą odpowiedź.

Uwaga:
Dla próbki $x_1,\ldots,x_n$ wariancję próbkową definiujemy jako $\hat{s}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$, gdzie $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

(A) 4.54

(B) 7.41

(C) 3.95

(D) 4.2

(E) 8.0

Zadanie 7.

Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach wykładniczych takich, że $EX = 1, EY = \frac{1}{2}$.

Rozważmy zmienną losową $Z = \frac{X}{X+Y}$. Ile wynosi EZ ?

(A) $2(1-\ln(2))$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{1}{12}$

(D) $4-5\ln(2)$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 8.

Niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n, n \geq 3$ pochodzą z rozkładu o dystrybuancie

$$F(x) = \begin{cases} 1 - x^{-\lambda} & x \geq 1, \\ 0 & x < 1, \end{cases}$$

gdzie parametr $\lambda > 0$ jest nieznany.
Skonstruowano estymator największej wiarogodności $\hat{\lambda}$ parametru λ. Ile wynosi $E(\hat{\lambda})$?

(A) λ

(B) $\frac{n+1}{n-1}\lambda$

(C) $\frac{n+1}{n}\lambda$

(D) $\frac{n}{n-1}\lambda$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 9.

Rzucamy symetryczną kostką sześcienną, oznaczmy wynik przez N. Następnie, niezależnie od siebie i od N, rzucamy N razy tą kostką. Oznaczmy wyniki $X_1, \ldots, X_N$. Następnie te X_i, które są mniejsze od N zamieniamy na 0, tzn. rozważamy ciąg

$$Y_i = \begin{cases} X_i & \text{jeśli } X_i \geq N \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Niech $S = Y_1 + \ldots + Y_N$. Ile wynosi ES?

(A) $\dfrac{67}{9}$

(B) 7

(C) $\dfrac{133}{18}$

(D) $\dfrac{7}{2}$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 10.

Wektor losowy (X,Y) przyjmuje dyskretne wartości z $\{0,1,\ldots\}^2$. Znana jest funkcja tworząca:

$$G_{X,Y}(s,t) = E(s^X t^Y) = \left(\frac{1-(p_1+p_2)}{1-(p_1 s + p_2 t)} \right)^n,$$

gdzie $n \in \{1,2,\ldots\}$, a $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0$ takie, że $p_1 + p_2 < 1$. Ile wynosi $P(X=1)$?

(A) $\dfrac{np_2}{1-p_1}\left(\dfrac{1-p_1-p_2}{1-p_1}\right)^n$

(B) $\dfrac{np_1}{1-p_2}\left(\dfrac{1-p_1-p_2}{1-p_2}\right)^n$

(C) $\dfrac{np_2}{1-p_2}\left(\dfrac{1-p_1-p_2}{1-p_1}\right)^n$

(D) $\dfrac{np_1}{1-p_1}\left(\dfrac{1-p_1-p_2}{1-p_2}\right)^n$

(E) Żadne z powyższych

Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 4 kwietnia 2022r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	D	
3	A	
4	E[1]	
5	C	
6	B	
7	A	
8	D	
9	C	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.

[1] UWAGA: 14.02.2023 odpowiedź została zmieniona (wcześniej błędnie była podana odpowiedź (D))