

Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXXIV Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 11 kwietnia 2022r.

Matematyka ubezpieczeń na życie

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej:

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.

W modelu ciągłym natężenie śmiertelności jest zgodne z modelem Weibull'a $\mu(t) = t$. Początkowa liczność populacji $L(0) = 10\ 000$. Proszę obliczyć oczekiwaną liczbę zgonów w czasie $0 \leq t \leq 1$.

Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) 3636
- (B) 3738
- (C) 3768
- (D) 3878
- (E) 3935

Zadanie 2.

W modelu ciągłym, rozważmy 30 letnie ubezpieczenie na życie i dożycie ze składką opłaconą jednorazowo z góry. Natężenie śmiertelności $\mu = 0,036$ oraz oprocentowania $\delta = 0,012$. W przypadku zgonu ubezpieczonego w chwili t wypłacana jest suma ubezpieczenia $SU_t = 1000 \times e^{-0,048t}$. Suma ubezpieczenia z tytułu dożycia do końca okresu umowy ubezpieczenia wynosi 1000.

Ile wynosi wartość rezerwy matematycznej netto ${}_{20}V$? Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) 707
- (B) 717
- (C) 727
- (D) 737
- (E) 747

Zadanie 3.

Rozważmy N -letnie ubezpieczenie na życie i dożycie dla (x) , z roczną składką regularną płaconą na początku każdego roku ubezpieczenia. Na koniec roku $k = 1, \dots, N$, w którym nastąpi zgon osoby ubezpieczonej wypłacana jest kwota świadczenia $b_k = SU + {}_{k-1}V$ gdzie SU jest stałą sumą ubezpieczenia, natomiast ${}_{k-1}V$ jest rezerwą matematyczną netto na początek roku k . W przypadku dożycia do końca terminu ubezpieczenia, ubezpieczony otrzymuje świadczenie w wysokości $\frac{1}{2}SU$.

Przy założeniu, iż stopa techniczna $i = 0\%$, proszę obliczyć jak wyraża się składka netto P za to ubezpieczenie.

$$(A) \quad P = SU \times \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{q_{x+k}}{p_{x+k}} \right) / \left(\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{p_{x+k}} \right)$$

$$(B) \quad P = SU \times \left(\frac{1}{2} \prod_{k=0}^{N-1} p_{x+k} + \sum_{k=1}^N \frac{q_{x+k}}{p_{x+k}} \right) / \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{p_{x+k}} \right)$$

$$(C) \quad P = SU \times \left(\frac{1}{2} \prod_{k=0}^{N-1} p_{x+k} + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{q_{x+k}}{p_{x+k}} \right) / \left(\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{p_{x+k}} \right)$$

$$(D) \quad P = SU \times \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N \frac{q_{x+k}}{p_{x+k}} \right) / \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{p_{x+k}} \right)$$

(E) Żadna z powyższych odpowiedzi

Zadanie 4.

W modelu ciągłym ze stałymi natężeniami śmiertelności $\mu = 0,02$ oraz oprocentowania $\delta = 0,02$ rozważmy 25 letnie ubezpieczenie na życie i dożycie. Początkowo, suma ubezpieczenia z tytułu zgonu oraz dożycia jest taka sama i przy tym założeniu obliczona została roczna intensywność składki netto. Na koniec 10 roku ubezpieczenia, ubezpieczony zwraca się do zakładu ubezpieczeń z wnioskiem o dwukrotne zwiększenie sumy ubezpieczenia wypłacanej **z tytułu zgonu** na pozostały okres $t \geq 10$. Jednocześnie ubezpieczony nie chce zmiany poziomu płaconej składki.

O ile procent spadnie suma ubezpieczenia z tytułu dożycia do końca terminu umowy?

Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) 40,1%
- (B) 41,1%
- (C) 43,2%
- (D) 44,3%
- (E) 46,2%

Zadanie 5.

Rozważmy ubezpieczenie terminowe na 20 lat, ze stałą składką brutto płaconą na początku każdego roku. Suma ubezpieczenia z tytułu zgonu wypłacana jest na koniec roku w którym nastąpił zgon. Suma ta jest indeksowana co roku o 5%, a na początku umowy wynosi 100 000 zł. ($SU_k = (1,05)^{k-1} \times 100\,000$ zł, gdzie rok zgonu $k = 1, \dots, 20$.)

Do obliczenia składki brutto przyjmujemy roczny narzut na koszty administracyjne wynoszący 48 zł oraz narzut na koszty akwizycji w wysokości 20% składki brutto.

Dane są: stopa techniczna $i = 2\%$, $q_{x+k-1} = 0,002$ dla $k = 1, \dots, 20$.

Ile wynosi roczna składka brutto za to ubezpieczenie? Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) 421 zł
- (B) 431 zł
- (C) 441 zł
- (D) 451 zł
- (E) 461 zł

Zadanie 6.

Rozważmy terminową rentę na życie (x) wypłacającą na początku każdego roku stałą kwotę R złotych. Dla pewnego k , kwoty rezerw brutto na początek roku k oraz $k+1$ są następujące:

- ${}_kV = 294\,506$ zł,
- ${}_{k+1}V = 279\,398$ zł.

W rezerwie brutto uwzględnione są kwoty przyszłych świadczeń rentowych oraz stałe, roczne koszty administracyjne, ponoszone na początku roku w kwocie 120 zł.

Dane są: stopa techniczna $i = 2\%$ oraz $q_{x+k} = 0,01509$.

Jaka jest wartość R rocznego świadczenia rentowego? Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) 24 550
- (B) 24 600
- (C) 24 750
- (D) 24 800
- (E) 24 650

Zadanie 7.

Rozważmy ubezpieczenie terminowe na życie (x) na n lat, ze stałą sumą ubezpieczenia 70 000 złotych oraz stałą składką brutto płaconą z góry, z częstotliwością roczną. Składka brutto zawiera stały narzut na koszty administracyjne w kwocie 60 zł rocznie, bez narzutu na koszty akwizycji. Wiemy, że śmiertelność odnotowywana na portfelu zakładu ubezpieczeń wynosi 70% tablic śmiertelności zastosowanych do obliczenia składki netto za to ubezpieczenie oraz, iż realnie ponoszone przez zakład koszty administracyjne wynoszą 40 zł rocznie.

Dane są:

- stopa techniczna $i = 2\%$,
- roczna składka brutto $P = 931,04$ zł
- obliczona przy założeniu 70% tablic śmiertelności renta $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 12,50396$
- oraz obliczony przy założeniu 70% tablic śmiertelności aktuarialny wskaźnik dyskontujący ${}_np_x v^n = 0,64524$.

Zakładając, że rzeczywista stopa zysku z inwestycji będzie równa stopie technicznej, proszę obliczyć wartość obecną zysku technicznego osiągniętego przez zakład z tej umowy, na jej początek.

Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) 3 171 zł
- (B) 3 271 zł
- (C) 3 371 zł
- (D) 3 471 zł
- (E) 3 571 zł

Zadanie 8.

W modelu ciągłym o stałym natężeniu śmiertelności $\mu = 0,01$ rozważamy ubezpieczenie na całe życie („whole of life”). W razie zgonu ubezpieczonego w chwili $t > 0$ wypłacana jest kwota $b_t = \max(SU, {}_tV)$, gdzie SU jest stałą sumą ubezpieczenia, natomiast ${}_tV$ to rezerwa matematyczna netto. Składka netto (bez narzutów na koszty) jest opłacana w formie renty ciągłej z roczną intensywnością $P = 5 \times \mu \times SU$. Roczne natężenie oprocentowania wynosi $\delta = 0,1$.

Proszę obliczyć najmniejsze T , takie że dla $t \geq T$ mamy $b_t = {}_tV$.

Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) 11,02
- (B) 11,52
- (C) 12,02
- (D) 12,52
- (E) 13,02

Zadanie 9.

Odroczona o trzy lata terminowa renta na życie (x) wypłaca na początku każdego roku umowy (od czwartego włącznie) kwotę R . Renta opłacana jest trzema składkami netto, płatnymi na początku 1., 2. oraz 3. roku, w kwotach S , $2S$, $3S$ odpowiednio.

W przypadku zgonu osoby ubezpieczonej w ciągu pierwszych trzech lat umowy, na koniec roku, w którym nastąpił zgon, wypłacane jest świadczenie ubezpieczeniowe w kwocie łącznie wpłaconych do chwili zgonu składek.

Dane są następujące wielkości:

- $q_x = 0,00402$, $q_{x+1} = 0,00444$, $q_{x+2} = 0,00490$,
- stopa techniczna $i = 2\%$,
- $S = 29\,558$ zł.

Proszę obliczyć wartość rezerwy matematycznej netto na koniec drugiego roku ubezpieczenia. Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) 91 054
- (B) 91 064
- (C) 91 074
- (D) 91 084
- (E) 91 094

Zadanie 10.

W pracowniczym planie emerytalnym, za pomocą łańcucha Markova, modelowane są prawdopodobieństwa przebywania w trzech stanach. Stany te są następujące:

- 1.- aktywny pracownik
- 2.- pracownik czasowo niezdolny do pracy (NP)
- 3.- pracownik poza planem (z powodu odejścia z pracy, trwałej NP lub zgonu).

Dana jest macierz prawdopodobieństw przejścia, w ciągu jednego okresu, ze stanu i do j , $A_{ij} = P(i \rightarrow j)$, (dla $i, j = 1, 2, 3$):

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,09 & 0,01 \\ 0,7 & 0,28 & 0,02 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Na koniec 10. okresu, wektor prawdopodobieństwa stanu, dla pewnego pracownika wynosi $s(10) = [0,7945; 0,1009; 0,1046]$.

Jakie jest prawdopodobieństwo, iż pracownik ten, na koniec 9. okresu, przebywał w stanie 2 (czasowej niezdolności do pracy)? Podaj najbliższą wartość.

- (A) 0,101
- (B) 0,102
- (C) 0,103
- (D) 0,104
- (E) 0,105

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 11 kwietnia 2022r.

Matematyka ubezpieczeń na życie

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko :

Pesel

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	E	
2	A	
3	A	
4	B	
5	D	
6	B	
7	D	
8	C	
9	B	
10	B	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.