Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXXIII Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 4 Października 2021r.

Matematyka ubezpieczeń na życie

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: ....

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.

W modelu ciągłym, ze stałym natężeniem śmiertelności $\mu = 0{,}02$ rozważmy potencjalnego klienta zakładu ubezpieczeń. Funkcja użyteczności tego klienta to $u(x) = x + dx^2$, gdzie $d = -\frac{1}{6} \times 10^{-5}$.

Osoba ta rozważa zakup terminowej renty na życie, płacącej przez 50 lat, ze stałą intensywnością roczną kwotę R. (Klient ignoruje w swoich rozważaniach wartość pieniądza w czasie, zatem można przyjąć, iż dla jego kalkulacji natężenie oprocentowania $\delta = 0$.)

X jest zmienną losową otrzymanych świadczeń rentowych. Dla jakiej wartości R, wartość oczekiwana $\mathrm{E}[u(X)]$ osiąga maksimum? Proszę podać najbliższą wartość.

(A) 7 327

(B) 7 872

(C) 8 352

(D) 9 872

(E) 9 992

Zadanie 2.

Dana jest grupa osób w wieku (x), której liczność w chwili $t = 0$ wynosi l_x. Wiadomo, że $q_x = 0{,}00207$, oraz $\mu_{x+t} = \frac{q_x}{1-(1-t)q_x}$ dla $0 < t < 1$. W przedziale czasowym $(\frac{3}{12}, \frac{5}{12})$ nastąpiło 5 zgonów. Ile wynosi początkowa liczność tej grupy osób l_x?
Proszę podać najbliższą wartość.

(A) 14 483

(B) 14 783

(C) 14 983

(D) 15 283

(E) 15 483

Zadanie 3.

Rozważmy ubezpieczenie terminowe na życie (x) na n lat, ze stałą sumą ubezpieczenia 100 000 złotych oraz stałą składką netto płatną z góry, z częstotliwością roczną. Wiemy, że śmiertelność odnotowywana na portfelu zakładu ubezpieczeń wynosi 80% tablic śmiertelności zastosowanych do obliczenia składki netto za to ubezpieczenie.
Dane są:

- stopa techniczna $i = 2\%$,
- składka netto $P = 310{,}67$ zł
- obliczona przy założeniu 80% tablic śmiertelności renta $\ddot{a}'_{x:\overline{n}|} = 12{,}93674$
- oraz obliczony przy założeniu 80% tablic śmiertelności aktuarialny wskaźnik dyskontujący ${}_np'_x v^n = 0{,}71415$.

Zakładając, że rzeczywista stopa zysku z inwestycji będzie równa stopie technicznej, proszę obliczyć wartość obecną zysku technicznego z tytułu śmiertelności osiągniętego przez zakład z tej umowy, na jej początek.
Proszę podać najbliższą wartość.

(A) 750 zł

(B) 800 zł

(C) 850 zł

(D) 880 zł

(E) 920 zł

Zadanie 4.

Mąż (30) należy do populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym $\omega_m = 90$, żona (25) należy do populacji de Moivre'a z wiekiem granicznym $\omega_ż = 100$. Proszę obliczyć średni czas przebywania w stanie owdowiałym po śmierci współmałżonka.
Zakładamy, iż T(30) oraz T(25) są niezależne, oraz że osoba owdowiała nie wstępuje ponownie w związek małżeński. Proszę podać najbliższą wartość.

(A) 23,5

(B) 24,5

(C) 25,5

(D) 26,5

(F) 27,5

Zadanie 5.

Rozważamy model ciągły, z intensywnością śmiertelności Weibull'a $\mu_t = 2t$, dla $t > 0$. Na życie (0) wystawiona została dwudziestoletnia polisa, która opłacana jest składką netto w formie renty ciągłej z roczną intensywnością P.

W przypadku zgonu osoby ubezpieczonej, wypłacane jest świadczenie $b_t = S + V_t$, gdzie S – stała suma ubezpieczenia, V_t – rezerwa składki netto.

Zakładając, iż roczne natężenie oprocentowania $\delta = 0{,}05$, proszę podać jaka jest relacja między wielkościami S oraz P.

(A) $P = 20S \times \frac{e-2}{e-1}$

(B) $P = 20S \times \frac{e-1}{e-2}$

(C) $P = 40S \times \frac{e-2}{e-1}$

(D) $P = 40S \times \frac{e-1}{e-2}$

(E) $P = 40S \times \frac{e-1}{e}$

Zadanie 6.

W modelu ciągłym rozważmy ubezpieczenie na całe życie ze stałymi natężeniami śmiertelności oraz całkowitej niezdolności do pracy (NP). W przypadku zgonu ubezpieczonego wypłacana jest SU = 100. W przypadku wystąpienia zdarzenia całkowitej NP ubezpieczonemu wypłacana jest SU_{NP} = 190. Wiadomo, iż natężenie śmiertelności osoby całkowicie niezdolnej do pracy wzrasta trzykrotnie. Po przyznaniu świadczenia z tytułu całkowitej NP ochrona z tytułu śmierci **nie** wygasa.

Dane są:

- roczne natężenie oprocentowania $\delta = 0{,}02$
- roczne natężenie śmiertelności $\mu_{x+t} = 0{,}01$
- oraz roczne natężenie ryzyka całkowitej niezdolności do pracy $\mu_{x+t}^{NP} = 0{,}02$.

Ile wynosi składka jednorazowa netto (*SJN*) za to ubezpieczenie?
Proszę podać najbliższą wartość.

(A) 105

(B) 110

(C) 120

(D) 126

(E) 130

Zadanie 7.

Spłata kredytu hipotecznego w kwocie K = 300 000 zł, rozłożona została na 30 lat. Roczna stopa oprocentowania kredytu wynosi j = 4%. Kredyt spłacany jest tak, iż na koniec każdego roku spłacana jest kwota $\frac{1}{30}K$ oraz odsetki naliczane od kwoty zadłużenia z początku roku. Ubezpieczenie kredytu spłaca na koniec roku śmierci kredytobiorcy kwotę $K \times (1+j) \times \frac{31-k}{30}$, gdzie k = 1, …, 30 jest rokiem śmierci kredytobiorcy.

Dane są: stopa techniczna i = 2%, q = 0,002, ${}_kp_x = (1-q)^k$, dla k = 1, … , 30.

Proszę obliczyć ile wynosi SJN za to ubezpieczenie? Proszę podać najbliższą wartość.

(A) 6 760

(B) 6 770

(C) 7 220

(D) 7 620

(E) 7 770

Zadanie 8.

W modelu ciągłym rozważmy grupę pięciu osób, z których dwie pochodzą z populacji o stałym natężeniu śmiertelności $\mu_1 = 0{,}02$, a trzy pochodzą z populacji o stałym natężeniu śmiertelności $\mu_2 = 0{,}01$. Roczne natężenie oprocentowania wynosi 2%.

Ubezpieczenie na życie członków tej grupy osób działa w następujący sposób.

- W chwili pierwszego zgonu każdej z osób, które przeżyły wypłacana jest kwota 5/2;
- W chwili drugiego zgonu każdej z osób, które przeżyły wypłacana jest kwota 4/2;
- W chwili trzeciego zgonu każdej z osób, które przeżyły wypłacana jest kwota 3/2;
- W chwili czwartego zgonu osobie, która przeżyła wypłacana jest kwota 2/2.

Zakładamy, iż dwa zgony nie występują równocześnie.

Ile wynosi składka jednorazowa netto (SJN) za to ubezpieczenie?
Proszę podać najbliższą wartość.

(A) 10,44

(B) 12,51

(C) 14,11

(D) 16,35

(E) 18,36

Zadanie 9.

W ubezpieczeniu na życie i dożycie na n lat, ze stałą roczną składką płatną z góry przez n lat, dane są następujące wielkości:

- $q_{x+n-2} = 0{,}00877$, $q_{x+n-1} = 0{,}00964$,
- stopa techniczna $i = 2\%$,
- składka netto 3 600 zł,
- suma ubezpieczenia na życie i dożycie 61 331 zł.

Proszę obliczyć iloraz składki za ryzyko do składki inwestycyjnej $\frac{\pi_{n-2}^{r}}{\pi_{n-2}^{s}}$.

Proszę podać najbliższą wartość.

(A) 1,16%

(B) 1,56%

(C) 2,16%

(D) 2,56%

(E) 3,16%

Zadanie 10.

Rozważmy model ciągły pewnego systemu ubezpieczeń społecznych, ze stałymi natężeniami prawdopodobieństw.

Ubezpieczony, od początku okresu zatrudnienia, przez N lat, aż do osiągnięcia wieku emerytalnego wpłaca składki z roczną intensywnością x% wynagrodzenia, chyba, że wcześniej osoba ta umrze lub stanie się niezdolna do pracy (NP). Zakładamy, iż intensywność roczna wynagrodzenia jest stała. W chwili śmierci lub zdarzenia NP system ten zaczyna wypłacać (odpowiednio beneficjentom lub ubezpieczonemu) rentę dożywotnią, której wartość obecna na dzień zdarzenia równa jest wartości zgromadzonego kapitału. W chwili dożycia do wieku emerytalnego, system ubezpieczenia społecznego zaczyna wypłacać ubezpieczonemu, o ile nie wypłaca już renty z tytułu NP, rentę dożywotnią z roczną intensywnością y% wynagrodzenia z okresu aktywności zawodowej. Przyjmując oznaczenia:

- δ - natężenie oprocentowania,
- μ^z - natężenie śmiertelności,
- μ^{np} - natężenie prawdopodobieństwa zdarzenia *NP*,

proszę podać ile wynosi $\frac{y}{x}$?

(Wskazówka: można porównać odpowiednie wartości aktuarialne na moment osiągnięcia wieku emerytalnego.)

(A) $\frac{e^{\delta N}-1}{\delta}(\mu^z+\mu^{np})$

(B) $\frac{e^{\delta N}-1}{\delta}\mu^z$

(C) $\frac{e^{\delta N}-1}{\delta}$

(D) $\frac{e^{\delta N}}{\delta}(\mu^z+\mu^{np})$

(E) $\frac{e^{\delta N}-1}{\delta}(\mu^z+\delta)$

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 4 października 2021r.

Matematyka ubezpieczeń na życie

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	D	
2	A	
3	B	
4	A	
5	C	
6	C	
7	E	
8	B	
9	A	
10	E	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.
♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.