

**Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy**

**LXXXIII Egzamin dla Aktuariuszy**

**Sesja egzaminacyjna w dniu 4 października 2021r.**

**Matematyka finansowa**

**Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: .....**

**Czas trwania egzaminu: 100 minut**

**Zadanie 1.**

Rozważmy model chwilowej stopy procentowej, zadany następującym równaniem:

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t), \quad a, b, \sigma > 0, \quad 2ab > \sigma^2,$$

gdzie  $W(t)$  jest procesem Wienera.

Niech  $P(r(t); t; T)$  opisuje cenę w chwili  $t$  obligacji zerokuponowej wygasającej w momencie  $T$  i o nominale PLN 1.

Wiadomo, iż:

- $P(3\%; 0.0; 1.0) = 0.975$  oraz;
- $P(5\%; 0.5; 1.5) = 0.950$ .

Proszę określić ile wynosi  $P(9\%; 1.0; 2.0)$  (proszę podać najbliższą wartość):

- (A) 0.902
- (B) 0.904
- (C) 0.906
- (D) 0.908
- (E) 0.910

**Zadanie 2.**

Rozważmy niepłacącą dywidendy akcję  $\mathcal{A}$ , której proces ceny  $S_t$  zadany jest następującym równaniem:

$$dS_t = S_t r dt + S_t \sigma dW(t), \quad r, \sigma > 0,$$

gdzie  $W(t)$  jest procesem Wienera.

Założmy, że na rynku dostępny jest instrument pochodny  $P$  na akcję  $\mathcal{A}$ , którego cena w każdej chwili czasu  $t$  zadana jest równaniem:

$$V_t = a^t \cdot (S_t)^b, \quad a > 0.$$

Proszę wyznaczyć  $a$ , wiedząc, iż rynek nie dopuszcza arbitrażu oraz  $b = 0.3, r = 3\%, \sigma = 0.73$ . Proszę podać najbliższą wartość.

- (A) 1.080
- (B) 1.085
- (C) 1.090
- (D) 1.095
- (E) 1.100

**Zadanie 3.**

Niech  $T_0 = 0$ . Rozważmy rynek Blacka-Scholesa, na którym nie ma możliwości arbitrażu. Na rynku dostępne są niepłacące dywidendy akcje  $\mathcal{A}$  o cenie  $S_{T_0} = 100$  oraz europejskie opcje kupna na akcję  $\mathcal{A}$  o pięcioletnim terminie realizacji. Parametr grecki *delta* (pochodna funkcji ceny opcji po cenie instrumentu bazowego) dla tej opcji wynosi 0.368, a parametr grecki *rho* (pochodna funkcji ceny opcji po stopie wolnej od ryzyka) wynosi 89. Proszę podać cenę europejskiej opcji kupna na akcję  $\mathcal{A}$  (proszę podać najbliższą wartość):

- (A) 19.0
- (B) 19.5
- (C) 20.0
- (D) 20.5
- (E) 21.0

**Zadanie 4.**

W chwili 0 kredytobiorca wziął 15-letni kredyt w kwocie 500 000 PLN. Kredyt ten jest spłacany równymi ratami  $R_1$ , na koniec każdego roku. Kredyt jest oprocentowany stałą stopą 3% w skali roku.

Na koniec roku  $N_1$ , kiedy pozostałe (po płatności raty) do spłaty saldo zadłużenia było po raz pierwszy mniejsze niż 50% oryginalnej kwoty pożyczki, kredytobiorca zdecydował się na wzięcie drugiego, tym razem 20-letniego kredytu, w kwocie 400 000 PLN. Kredyt ten również spłacany jest równymi ratami  $R_2$  na koniec każdego roku i jest oprocentowany stałą stopą 4% w skali roku.

Po spłacie 3 rat dla obu kredytów, kredytobiorca zdecydował, iż nie jest w stanie spłacać więcej niż  $R_3 = 50\% (R_1 + R_2)$  w skali roku. Poprosił więc bank o skonsolidowanie obu kredytów i określenie minimalnego okresu  $N_2$  trwania kredytu skonsolidowanego (w pełnych latach), dla którego spełniony jest warunek na wysokości raty  $R_3$ . Wyliczenia nowej raty kredytu bank dokonał w oparciu o pozostałe do spłaty salda obu pożyczek, powiększone dodatkowo o 5% (koszt konsolidacji).

Skonsolidowany kredyt spłacany będzie równymi ratami na koniec roku i jest oprocentowany stałą stopą 5% w skali roku. Proszę wyznaczyć  $N_2$ .

- (A) 22
- (B) 23
- (C) 24
- (D) 25
- (E) 26

**Zadanie 5.**

Niech  $W(t)$  będzie standardowym procesem Wienera, a  $S_t$  procesem, dla którego zachodzi:

$$dS_t = tS_t dt + S_t dW(t).$$

Poszukujemy rozwiązania powyższego równania w postaci  $S_t = \exp(W(t) + f(t))$ .

Wiedząc, iż  $S_0 = 3$ , proszę wyznaczyć postać  $f(t)$ .

- (A)  $f(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} + \ln 3$
- (B)  $f(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \ln 3$
- (C)  $f(t) = \frac{t^2}{3} + \frac{t}{2} + \ln 2$
- (D)  $f(t) = \frac{t^2}{3} - \frac{t}{2} + \ln 2$
- (E) Żadna z powyższych.

**Zadanie 6.**

Splata kredytu 120 ratami płatnymi na koniec każdego kwartału odbywa się w następujący sposób:

- pierwsze i ostatnie 40 rat ma wartość  $A$ ,
- pozostałe raty mają wartość  $B$ .

Wiadomo, że kwartalna stopa procentowa wynosi 5.00%, a sumaryczna kwota odsetek naliczonych w pierwszych 40 ratach stanowi 80% kwoty odsetek naliczonych w kolejnych 40 ratach. Proszę określić, ile wynosi iloraz  $\frac{B}{A}$  (proszę podać najbliższą wartość).

- (A) 3.4
- (B) 3.5
- (C) 3.6
- (D) 3.7
- (E) 3.8

**Zadanie 7.**

Funkcja intensywności oprocentowania rachunku w chwili  $t$  dla kwoty zainwestowanej w chwili  $s$ ,  $0 \leq s \leq t$ , wynosi  $\delta(s, t) = (1 + s + t)^{-1}$ .

Założmy, że w chwili 0 inwestowana jest kwota startowa  $S$ . Inwestor rozważa następujące strategie inwestycyjne realizowane w horyzoncie czasu  $[0,3]$ :

1. zainwestowana kwota jest utrzymywana na rachunku do  $t = 3$ ,
2. zainwestowana kwota jest utrzymywana na rachunku do  $t = 2$ , następnie wypłacana jest jej zakumulowana wartość, która natychmiast jest reinwestowana na tym samym rachunku (zgodnie z zadaną intensywnością oprocentowania) do  $t = 3$ ,
3. zainwestowana kwota jest utrzymywana na rachunku do  $t = 1$ , następnie wypłacana jest jej zakumulowana wartość, która natychmiast jest reinwestowana na tym samym rachunku (zgodnie z zadaną intensywnością oprocentowania) do  $t = 3$ ,
4. zainwestowana kwota jest wypłacana, a następnie reinwestowana na tym samym rachunku (zgodnie z zadaną intensywnością oprocentowania) zarówno w  $t = 1$ , jak i w  $t = 2$ .

Niech  $K_{\max}(3)$  i  $K_{\min}(3)$  oznaczają odpowiednio najwyższą i najniższą zakumulowaną na tym rachunku na koniec inwestycji kwotę dla wskazanych powyżej strategii. Iloraz tych kwot, tzn.  $\frac{K_{\max}(3)}{K_{\min}(3)}$  wynosi (proszę podać najbliższą odpowiedź):

- (A) 1.10
- (B) 1.15
- (C) 1.20
- (D) 1.25
- (E) 1.30



**Zadanie 8.**

Firma ubezpieczeniowa szacuje, że będzie musiała dokonać wypłaty w wysokości 13 593 PLN w  $t = 9$ . W  $t = 0$  zarządzający portfelem finansuje ww. zobowiązanie za pomocą 4-letnich obligacji zerokuponowych i rocznej renty dożywotniej płatnej z dołu stosując strategię immunizacji. O ile procent zarządzający portfelem będzie musiał zmienić udział rent dożywotnich w portfelu w  $t = 1$ , tak aby utrzymać immunizację portfela, zakładając, że roczna stopa procentowa w całym okresie trwania inwestycji wynosi 8% (proszę podać najbliższą odpowiedź)?

- (A) -1.88%
- (B) -1.98%
- (C) -2.08%
- (D) -2.18%
- (E) -2.28%

**Zadanie 9.**

Tabela poniżej przedstawia krzywą swap (swap curve) – roczne stopy swap dla kontraktów IRS z płatnościami odsetek co pół roku:

zapadalność (maturity) kontraktu [lata]	Stopy swap [%]
0.5	5.45
1.0	5.55
1.5	5.70

Wyznacz współczynnik dyskontowy spójny z powyższymi stopami swap dla terminu zapadalności 1,5 (proszę podać najbliższą odpowiedź):

- (A) 0.911
- (B) 0.913
- (C) 0.915
- (D) 0.917
- (E) 0.919

**Zadanie 10.**

Który z poniższych wzorów odpowiada duracji Macaulaya dla renty płatnej z góry o płatnościach  $\frac{1}{m}$  dokonywanych  $m$  razy w roku przez  $n$  lat, rozpoczynającą się w  $t = k$ , gdzie  $i$  oznacza efektywną stopę procentową dla okresu o długości  $\frac{1}{m}$ .

(A)  $k + \frac{1}{ni} - \frac{m}{(1+i)^{mn}-1}$

(B)  $k + \frac{1}{mi} - \frac{m}{(1+i)^{mn}-1}$

(C)  $k + \frac{1}{ni} - \frac{n}{(1+i)^{mn}-1}$

(D)  $k + \frac{1}{mi} - \frac{n}{(1+i)^{mn}-1}$

(E) Żadna z powyższych.

**Dystrybuanta rozkładu normalnego  $N(0,1)$** 

<b>z</b>	<b>0.00</b>	<b>0.01</b>	<b>0.02</b>	<b>0.03</b>	<b>0.04</b>	<b>0.05</b>	<b>0.06</b>	<b>0.07</b>	<b>0.08</b>	<b>0.09</b>
<b>0.0</b>	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
<b>0.1</b>	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
<b>0.2</b>	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
<b>0.3</b>	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
<b>0.4</b>	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
<b>0.5</b>	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
<b>0.6</b>	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
<b>0.7</b>	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
<b>0.8</b>	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
<b>0.9</b>	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
<b>1.0</b>	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
<b>1.1</b>	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
<b>1.2</b>	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
<b>1.3</b>	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
<b>1.4</b>	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
<b>1.5</b>	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
<b>1.6</b>	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
<b>1.7</b>	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
<b>1.8</b>	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
<b>1.9</b>	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
<b>2.0</b>	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
<b>2.1</b>	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
<b>2.2</b>	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
<b>2.3</b>	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
<b>2.4</b>	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
<b>2.5</b>	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
<b>2.6</b>	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
<b>2.7</b>	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
<b>2.8</b>	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
<b>2.9</b>	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
<b>3.0</b>	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
<b>3.1</b>	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
<b>3.2</b>	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
<b>3.3</b>	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
<b>3.4</b>	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
<b>3.5</b>	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
<b>3.6</b>	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
<b>3.7</b>	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
<b>3.8</b>	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
<b>3.9</b>	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

**Egzamin dla Aktuariuszy**  
**Sesja egzaminacyjna w dniu 4 października 2021r.**

**Matematyka finansowa**

**Arkuszu odpowiedzi\***

Imię i nazwisko : .....

Pesel .....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja ♦
1	A	
2	A	
3	A	
4	D	
5	B	
6	D	
7	D	
8	E	
9	E	
10	D	

\* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*.

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.