Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXXII Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 2 marca 2020r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej ....

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.

Załóżmy, że chcemy wyestymować $\int_0^1 x dx - \int_0^1 x^2 dx$ poprzez symulacje, dwoma metodami. Ustalmy $n \geq 3$.

- Metoda 1. Symulujemy niezależne zmienne losowe $U_{j,1}, U_{j,2}, \ldots, U_{j,n}$, $j = 1, 2$ o rozkładzie jednostajnym $U(0,1)$. Estymator
$$\hat{Y}_a = \hat{Y}_1 - \hat{Y}_2,$$
gdzie
$$\hat{Y}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_{1,i}, \quad \hat{Y}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_{2,i}^2.$$

- Metoda 2. Symulujemy niezależne zmienne losowe $U_1, U_2, \ldots, U_n$ o rozkładzie jednostajnym $U(0,1)$. Estymator
$$\hat{Y}_b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(U_i - U_i^2).$$

W obu przypadkach mamy $E\hat{Y}_a = E\hat{Y}_b = 1/6$. Ile wynosi $\frac{Var(\hat{Y}_a)}{Var(\hat{Y}_b)}$?

(A) 32

(B) 31

(C) $\frac{180}{31}$

(D) 11

(E) 6

Zadanie 2.

Niech

$$X = 4\sqrt{-2\ln(1-U)}, \quad \text{gdzie } U \sim U(0,1).$$

Ile wynosi $\dfrac{EX^4}{EX^2}$?

(A) 128

(B) 50

(C) 64

(D) 32

(E) $\dfrac{1}{3}$

Zadanie 3.

Niech $N \geq 7$. W urnie I umieszczono N białych, a w urnie II umieszczono N czarnych kul. Rozważmy następującą procedurę:

> W jednym kroku wybieramy losowo (tj. z rozkładem jednostajnym) kulę z pierwszej urny oraz, także losowo, kulę z drugiej urny (niezależnie). Następnie kule te są zamieniane.

Niech X_k oznacza liczbę kul czarnych w urnie I po wykonaniu k kroków powyższej procedury.
Ile wynosi $\rho(m) = \lim_{k\to\infty} P(X_k = m)$?

(A) $\rho(0)\binom{N}{m}, m = 1, \ldots, N$, gdzie $\rho(0) = \left[1 + \sum_{i=1}^{N} \binom{N}{i}\right]^{-1}$.

(B) $\rho(0)\left(\frac{m}{N}\right)^2, m = 1, \ldots, N$, gdzie $\rho(0) = \left[1 + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{i}{N}\right)^2\right]^{-1}$.

(C) $\rho(0)\left(\frac{m}{N}\right), m = 1, \ldots, N$, gdzie $\rho(0) = \left[1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{i}{N}\right]^{-1}$.

(D) $\rho(0)\binom{N}{m}^2, m = 1, \ldots, N$, gdzie $\rho(0) = \left[1 + \sum_{i=1}^{N} \binom{N}{i}^2\right]^{-1}$.

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 4.

Wektor (X,Y) ma rozkład ciągły o gęstości

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{y}} & \text{dla } (x,y) \in (0,1)^2, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

$\mathrm{Cov}(X, \max(X,Y))$ wynosi:

(A) $\dfrac{1}{21\sqrt{2}}$

(B) $\dfrac{1}{21}$

(C) $\dfrac{2}{45}$

(D) $\dfrac{8}{189}$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 5.

Niech Z_1, Z_2 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o standardowym rozkładzie normalnym $N(0,1)$. Zdefiniujmy

$$\begin{aligned} X &= \quad 1 + pZ_1, \\ Y &= \quad q + Z_1 + \sqrt{3}Z_2. \end{aligned}$$

Wiadomo, że

$$E[X|Y=8] = 2, \qquad \mathrm{Var}[X|Y=7] = \frac{3}{4}.$$

Ile wynoszą parametry p i q?

(A) $p = 2, q = 1$

(B) $p = 1, q = 4$

(C) $p = 1, q = 1$

(D) $p = 6, q = 2$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 6.

Zakładamy, że miesięczna liczba szkód komunikacyjnych w pewnym mieście ma rozkład Poissona z parametrem θ (liczby szkód w różnych miesiącach są niezależnymi zmiennymi losowymi). Oznaczmy liczbę szkód w miesiącu i-tym przez X_i. Rozkład (a priori) parametru θ ma następującą gęstość:

$$p(\theta) = \frac{8}{3}\theta^3 e^{-2\theta}, \quad \theta \geq 0.$$

W ciągu pierwszych sześciu miesięcy wystąpiły następujące liczby szkód:

$$X_1 = 3,\ X_2 = 2,\ X_3 = 5,\ X_4 = 5,\ X_5 = 1,\ X_6 = 4.$$

Ile wynosi wartość oczekiwana rozkładu *a posteriori* parametru θ, tj.

$$E(\theta | X_1 = 3,\ X_2 = 2,\ X_3 = 5,\ X_4 = 5,\ X_5 = 1,\ X_6 = 4)?$$

(A) 3

(B) $3\frac{1}{3}$

(C) 4

(D) 2

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 7.

Mówimy, że PIN składający się z 5 cyfr jest *poprawny* jeśli wszystkie cyfry są *różne*. Zatem zbiór poprawnych PINów to

$$\mathscr{E} = \{(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5) : d_i \in \{0, \ldots, 9\}, i \in \{1, \ldots, 5\}, \forall (i \neq j,\ i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\})\ d_i \neq d_j\}.$$

Ze zbioru $\mathscr{E}$ wylosowano jednostajnie (i niezależnie od siebie) dwa PINy. Niech X oznacza liczbę cyfr, które występują w obu PINach.

Ile wynosi $Var(X)$?

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{7}{10}$

(C) $\frac{2}{5}$

(D) $\frac{25}{36}$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 8.

Ustalmy $n \geq 7$. Wybierzmy podzbiór $X \subseteq \{0, 1, \ldots, n\}$ losowo (jednostajnie – każdy podzbiór ma tą samą szansę zostania wybranym) , oznaczmy przez $|X|$ liczbę elementów zbioru X. Niech Y oznacza odwrotność $1 + |X|$, tzn. $Y = \frac{1}{1+|X|}$.

Ile wynosi EY ?

(A) $\frac{2}{2+n}$

(B) $\frac{1-2^{-n}}{n+1} + \frac{1}{2}$

(C) $\frac{2-2^{-n}}{n+1}$

(D) $\frac{5-2^{-n+2}}{2(n+1)}$

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 9.

Niech $X_1,\ldots,X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie
$P(X_i=0)=P(X_i=1)=1/2, i=1,\ldots,n.$
Dla tak wylosowanego ciągu niech Y oznacza liczbę maksymalnych podciągów złożonych z samych 0 lub 1. Dla przykładu, dla $(0,0,1,0,1,1,0,0,0)$ maksymalne podciągi to

$$(\underline{0,0},\underline{1,}\ \underline{0,}\ \underline{1,1},\underline{0,0,0}),$$

zatem $Y=5$.

Wiadomo, że $EY=51$. Ile wynosi n ?

(A) 100

(B) 101

(C) 102

(D) 103

(E) Żadne z powyższych

Zadanie 10.

Niezależne zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$ pochodzą z rozkładu wykładniczego z parametrem λ o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{jeśli } x \geq 0, \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Chcemy skonstruować estymator trzeciego momentu, tj. $\mu_3(\lambda) = EX_1^3 = \dfrac{6}{\lambda^3}$ postaci

$$\hat{\mu}_3 = \alpha MLE(\mu_3(\lambda)),$$

gdzie $MLE(\mu_3(\lambda))$ jest estymatorem największej wiarogodności funkcji $\mu_3(\lambda)$. Ile musi wynosić stała α, żeby estymator $\hat{\mu}_3$ był nieobciążony?

(A) $\dfrac{n^2}{(n+1)(n+2)}$

(B) $\dfrac{n}{(n+1)}$

(C) $\dfrac{2(n+2)}{(n+1)}$

(D) $\dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}$

(E) Żadne z powyższych

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 2 marca 2020r.

Prawdopodobieństwo i statystyka

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	B	
2	C	
3	D	
4	D	
5	B	
6	A	
7	D	
8	E	
9	B	
10	A	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.