Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXXII Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 2 marca 2020r.

Matematyka pozostałych ubezpieczeń osobowych i majątkowych

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: ....

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.
W modelu nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym nadwyżka początkowa wynosi 1.5, składka roczna wynosi 1, a łączna wartość szkód w każdym roku z prawdopodobieństwem sześć dziesiątych wynosi 0 i z prawdopodobieństwem cztery dziesiąte wynosi 2 (niezależnie od łącznej wartości szkód w innych latach). Prawdopodobieństwo ruiny wynosi:

(A) $\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$

(B) $\frac{2}{3\sqrt{3}}$

(C) $\frac{1}{3}$

(D) $\frac{4}{9}$ TAK

(E) $\frac{5}{9}$

Zadanie 2.

Zmienna losowa N ma rozkład ujemny dwumianowy z parametrami $(r, q) = \left(8, \frac{2}{3}\right)$,

tzn.: $\Pr(N = k) = \frac{\Gamma(8+k)}{\Gamma(8)k!}\left(\frac{1}{3}\right)^8\left(\frac{2}{3}\right)^k$, $\quad k = 0,1,2,...$

Niech k^* oznacza taką liczbę naturalną, że:

$k^* = \inf\{k: \quad \Pr(N = k) \geq \Pr(N = k+1)\}$

Liczba k^* wynosi:

(A) 12

(B) 13 TAK

(C) 14

(D) 15

(E) 16

Zadanie 3
Wartość oczekiwana szkód X z ryzyka jest funkcją parametru Θ który charakteryzuje podmiot na to ryzyko narażony, i wynosi $\mathrm{E}(X|\Theta)=\Theta$. Rozkład parametru Θ w populacji dany jest na półosi dodatniej gęstością:

- $f_{\Theta}(\theta)=2\{\exp(-\theta)-\exp(-2\theta)\}$

Ubezpieczyciel nie rozróżnia ryzyk lepszych od gorszych, ustalić więc musi składkę równą dla wszystkich. Musi się jednak liczyć ze skutkami negatywnej selekcji. Oznaczmy przez:

- U zmienną losową przyjmującą wartość 1 jeśli podmiot nabędzie ubezpieczenie, zaś 0 jeśli nie nabędzie;
- Π składkę zaoferowaną przez ubezpieczyciela.

Załóżmy, że negatywna selekcja przejawia się w tym, że:

- $\Pr(U=1|\Theta=\theta)=1-\exp\left(-\frac{2\theta}{\Pi}\right)$ dla $\theta>0$

Jeśli ubezpieczyciel ustalił składkę na poziomie $\Pi=2$, to oczekiwana wartość szkód dla przeciętnego podmiotu (spośród tych podmiotów które zawrą ubezpieczenie), a więc:
$\mathrm{E}(X|U=1)$,
wyniesie:

(A) 2

(B) $\frac{19}{12}$

(C) $\frac{5}{3}$

(D) $\frac{21}{12}$

(E) $\frac{11}{6}$ TAK

Zadanie 4.

Liczba szkód N z ubezpieczenia AC przy danej wartości λ parametru Λ charakteryzującej kierowcę ma rozkład Poissona:

$$\Pr(N = k | \Lambda = \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!}\exp(-\lambda), \quad k = 0,1,2,\dots .$$

Rozkład parametru Λ w populacji kierowców dany jest na półosi dodatniej gęstością:

- $f_\Lambda(\lambda) = 81 \cdot \lambda \cdot \exp(-9\lambda)$

Ubezpieczenie AC jest jednak dobrowolne. Niech:

- U oznacza zmienną losową przyjmującą wartość 1 jeśli kierowca nabędzie ubezpieczenie, zaś 0 jeśli nie nabędzie;

Załóżmy, że:

- $\Pr(U = 0 | \Lambda = \lambda) = \exp(-2\lambda)$ dla $\lambda > 0$

Informacja o kierowcy z poprzedniego roku może brzmieć tak, że:

- Nie nabył ubezpieczenia
- Nabył ubezpieczenie, i miał zero szkód, jedną szkodę, dwie szkody, …

Stosunek warunkowych wartości oczekiwanych:

$$\frac{\mathrm{E}(\Lambda | U = 1, N = 0)}{\mathrm{E}(\Lambda | U = 0)}$$

wynosi:

(A) 1

(B) $\frac{31}{30}$

(C) $\frac{41}{30}$

(D) $\frac{3}{2}$

(E) $\frac{91}{60}$ TAK

Zadanie 5.

Rozważamy klasyczny proces nadwyżki:

$U(t) = u + ct - S_{N(t)}$, gdzie:

- ct jest sumą składek zgromadzonych do momentu *t*,
- $N(t)$ jest procesem Poissona z parametrem intensywności λ,
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ jest sumą wartości *n* pierwszych szkód
- wartości szkód $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ są i.i.d, niezależne od procesu $N(t)$

Wartość pojedynczej szkody ma rozkład Pareto dany na półosi dodatniej gęstością:

- $f_Y(y) = \dfrac{2}{(1+y)^3}$
- zaś nadwyżka początkowa i parametr intensywności składki wynoszą:
- $u = 4$, $c = 1.2$, $\lambda = 1$

Prawdopodobieństwo, że do ruiny dojdzie w pierwszym z tych momentów czasu, kiedy nadwyżka spadnie poniżej wartości początkowej, wynosi:

(A) $\dfrac{1}{30}$

(B) $\dfrac{1}{25}$

(C) $\dfrac{5}{24}$

(D) $\dfrac{1}{6}$ TAK

(E) $\dfrac{1}{5}$

Zadanie 6.
Mamy trzy zmienne losowe dotyczące szkody, do której doszło w ciągu danego roku:

- T - czas zajścia szkody w ciągu tego roku kalendarzowego, o rozkładzie jednostajnym na odcinku $(0, 1)$,
- D - czas, jaki upływa od momentu zajścia szkody do momentu jej likwidacji, o rozkładzie danym na odcinku $(0, 2)$ gęstością:
  $$f_D(x) = 1 - 0.5x\,,$$
- Y – wartość szkody.

Jednostką pomiaru czasu (tak dla zmiennej T, jak i dla zmiennej D) jest 1 rok.

- Zmienne T oraz D są nawzajem niezależne.
- Wartość szkody nie zależy od tego, kiedy do niej dojdzie, natomiast występuje tendencja do szybkiej likwidacji małych szkód i dłużej trwającej likwidacji dużych szkód, co wyraża następujące założenie:
  $$\mathrm{E}(Y|D,T) = \mathrm{E}(Y|D) = 10 + D$$

Warunkowa oczekiwana wartość szkody pod warunkiem, że szkoda ta została zlikwidowana w roku zajścia, a więc:
$$E(Y|T + D \leq 1)$$
wynosi:

(A) 10.2

(B) $10\,\frac{1}{4}$

(C) 10.3 TAK

(D) $10\,\frac{1}{3}$

(E) 10.4

Zadanie 7.
Mamy niepełną informację o rozkładzie nieujemnej zmiennej losowej X w postaci:

x	$F_X(x)$	$\mathrm{E}[(X-x)_+]$
1	0.7	5.5
3	0.9	5

Wobec tego kres górny zbioru możliwych wartości wariancji wewnątrz-przedziałowej w przedziale $(1, 3]$, a więc najmniejsza z takich liczb c, które z pewnością spełniają nierówność:

$$\mathrm{var}\{X \mid X \in (1, 3]\} < c$$

wynosi:

(A) 1/4

(B) 1/2

(C) ¾ TAK

(D) 1

(E) 5/4

Zadanie 8.
Wiemy, że w populacji ubezpieczających się od pewnego ryzyka zdarzają się oszuści. Załóżmy, że:

- przypadkowo wylosowany z tej populacji osobnik jest oszustem z prawdopodobieństwem 0.04
- oszust z całą pewnością zgłasza co najmniej jedną szkodę w ciągu roku, a czas zgłoszenia pierwszej z nich (liczony od początku roku) dany jest na odcinku $t \in (0, 1)$ gęstością prawdopodobieństwa $f(t) = \frac{3}{2} - t$
- proces zgłaszania szkód u uczciwych ubezpieczonych jest procesem Poissona z parametrem intensywności $\lambda = \frac{1}{10}$ rocznie

Prawdopodobieństwo iż ubezpieczony jest oszustem pod warunkiem, że zgłosił (pierwszą) szkodę po trzech miesiącach (w momencie czasu $t = 0.25$) wynosi z dobrym przybliżeniem:

(A) 0.348 TAK

(B) 0.335

(B) 0.323

(D) 0.311

(E) 0.300

Zadanie 9.

Rozkład zmiennej losowej X ma dwie ekwiwalentne reprezentacje:

- jako rozkład złożony geometryczny, z liczbą składników N o rozkładzie:

  $$\Pr(N = k) = \frac{2}{3^{k+1}}, \qquad k = 0,1,2,\dots,$$

  oraz wartością pojedynczego składnika o rozkładzie wykładniczym z wartością oczekiwaną równą 2
- jako rozkład złożony dwumianowy, gdzie liczba składników N może wynieść tylko zero lub jeden, zaś wartość składnika (o ile $N = 1$) ma rozkład:

(A) wykładniczy o wartości oczekiwanej 2

(B) wykładniczy o wartości oczekiwanej 3 TAK

(C) Gamma o parametrach (3,1)

(D) Gamma o parametrach (3,2)

(E) Gamma o parametrach $\left(2, \frac{2}{3}\right)$

Zadanie 10.

Wartość szkody Y ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej β^{-1}. Aproksymujemy zmienną Y za pomocą zmiennej $\tilde{Y}$ o rozkładzie określonym na zbiorze liczb naturalnych z zerem, o własnościach:

$\Pr\left(\tilde{Y} = k+1\right) = \Pr\left(\tilde{Y} = k\right) \cdot \exp(-\beta)$ dla $k = 1, 2, 3, \ldots$, oraz:

$E\left(\tilde{Y}\right) = E(Y)$.

Wtedy $\Pr\left(\tilde{Y} = 0\right)$ wynosi:

(A) $1 - e^{-\beta}$

(B) $\dfrac{1 - e^{-\beta}}{\beta}$

(C) $1 - \dfrac{1 - e^{-\beta}}{\beta}$ TAK

(D) $\dfrac{e^{-\beta} - e^{-2\beta}}{\beta}$

(E) $1 - \dfrac{e^{-\beta} - e^{-2\beta}}{\beta}$

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 2 marca 2020r.

Matematyka pozostałych ubezpieczeń osobowych i majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	D	
2	B	
3	E	
4	E	
5	D	
6	C	
7	C	
8	A	
9	B	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna

.