

**Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy**

**LXXXI Egzamin dla Aktuariuszy**

**Sesja egzaminacyjna w dniu 19 Listopada 2019 r.**

**Zarządzanie ryzykiem zakładu ubezpieczeń**

**Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: .....**

**Czas trwania egzaminu: 120 minut**

**Zadanie 1.**

Towarzystwo ubezpieczeń na życie *Poznań Życie S.A.* sprzedaje dwa rodzaje produktów: ubezpieczenie terminowe na życie oraz ubezpieczenie na życie, gdzie świadczenie wypłacane jest w formie renty. Fundusze ubezpieczeniowe zgromadzone przez Towarzystwo inwestowane są w obligacje skarbowe oraz instrumenty dłużne gwarantowane przez jednostki samorządowe. Oba produkty dystrybuowane są w oddzielnych kanałach dystrybucji i administrowane przez wyodrębnione biura. Towarzystwo kalkuluje niezbędny kapitał ekonomiczny uwzględniając fakt, że oba produkty dotyczą niejako przeciwstawnych ryzyk (odpowiednio ryzyka umieralności i ryzyka długowieczności). Towarzystwo oszacowało niezbędny kapitał ekonomiczny oddzielnie dla ubezpieczeń terminowych na życie na poziomie 12 mln zł, oraz dla ubezpieczeń na życie, gdzie świadczenie wypłacane jest w postaci renty na poziomie 23 mln zł. Jednocześnie oszacowano, że korelacja pomiędzy tymi liniami biznesu wynosi 0,5. Jako aktuariusz Towarzystwa oblicz poziom kapitału ekonomicznego łącznie uwzględniając macierz korelacji oraz wyznacz poziom korzyści związanych z efektem dywersyfikacji linii biznesowych. Wyjaśnij wpływ dywersyfikacji na poziom kapitału ekonomicznego i jego zmiany w sytuacji kiedy rozważane ryzyka są ze sobą w 100% skorelowane pozytywnie lub negatywnie.

**Rozwiązanie:**

Ryzyka skorelowane w 100% nie wygenerują pozytywnego efektu dywersyfikacji. W sytuacji 100% korelacji negatywnej ryzyka „zniosą” się wzajemnie. Efekt dywersyfikacji występuje w sytuacji kiedy ryzyka nie są w pełni skorelowane. W tej sytuacji prawdopodobne straty wynikające z realizacji ryzyk będą niższe niż oszacowany kapitał ekonomiczny. Wynika to z faktu, że prawdopodobieństwo tych strat jest niższe od poziomu istotności z jakim został oszacowany kapitał ekonomiczny. W konsekwencji poziom kapitału jaki jest niezbędny w przypadku ryzyk skorelowanych jest niższy niż poziom kapitały jaki wynika z sumy kapitału oszacowanego oddzielnie dla każdego ryzyka.

Bez efektu dywersyfikacji	35,000,000.00
Z efektem dywersyfikacji:	30,805,843.60
efekt dywersyfikacji	4,194,156.40

**Zadanie 2.**

Zakład ubezpieczeń nabył 5-letnią obligację rządową w dniu jej emisji po cenie równej wartości nominalnej, która wynosi 10.000 zł. Oprocentowanie obligacji jest stałe i wynosi 2,3% p.a. Stopa dyskontowa wynosi 1,8%. Obligacja jest tak skonstruowana, że kupony są płatne w okresach rocznych. Na rynku pojawiają się informacje, że rynkowe stopy procentowe mogą zostać obniżone w najbliższym czasie o 25 pb. Proszę obliczyć *duration* oraz odpowiedzieć na pytanie czy zmieni się cena obligacji w przypadku wzrostu stóp procentowych. Jeśli cena ulegnie zmianie to proszę podać o jaką wartość.

**Rozwiązanie:**

Wyszczególnienie	Okres (t)				
	1	2	3	4	5
CF	230	230	230	230	10,230
Stopa dyskontowa	1.80%	1.80%	1.80%	1.80%	1.80%
PV	225.93	221.94	218.01	214.16	9,357.00
PV * t	225.93	443.88	654.04	856.64	46,785.01
D=	4.78				
zmiana wartości [%]	1.17%				
zm. Wartość zł	119.66				

*Duration* wyniesie: 4,78 roku

Przy prognozowanej na rynku zmianie stóp procentowych na poziomie -25 pb zmiana wartości obligacji wyniosłaby 1,17% , co kwotowo daje wzrost wartości o 119,66 zł. Natomiast pytanie w zadaniu dotyczy zmiany ceny obligacji przy wzroście stóp procentowych. Wówczas cena spadnie o 119,66 zł. (120 zł).

**Zadanie 3.**

Podaj definicję ryzyka związanego z rezygnacją z umowy ubezpieczenia. Jako aktuariusz towarzystwa ubezpieczeń zaproponuj działania jakie mogą być podjęte w celu minimalizacji tego ryzyka.

---

**Rozwiązanie:****Definicja:**

Ryzyko straty lub niekorzystnej zmiany wartości zobowiązań ubezpieczeniowych, wynikające ze zmian w poziomie, zmian trendu lub zmian zmienności wskaźników rezygnacji z umów, wygasania polis, wykupów oraz odnowień.

**Działania:**

1. Minimalizacja ryzyka missellingu poprzez stosowanie analizy potrzeb klienta.
2. Analiza sytuacji makroekonomicznej kraju/rynku/segmentów, na których prowadzona jest sprzedaż.
3. Analiza poziomu rezygnacji i analiza lapsów.
4. Analiza bieżących trendów i problemów rynkowych.
5. Analiza współpracy z pośrednikami.
6. Analiza wskaźników zadowolenia klientów.
7. Wdrożenie aktuarialnego cyklu kontroli, tj. wyznaczania adekwatnych założeń, monitorowania ich realizacji i wdrażania odpowiednich zmian w produktach i wycenach (np. założeniach), monitorowanie odpowiednich wskaźników na poszczególnych etapach cyklu życia produktów.
8. Stała komunikacja i wymiana informacji pomiędzy underwritingiem, wypłatą roszczeń, sprzedażą, osobami odpowiedzialnymi za reklamacje.
9. Modele predykcyjne obejmujące wartość klienta, prawdopodobieństwo odejścia wraz z adekwatną strategią.
10. Analiza i monitorowanie poziomu korzystania z opcji (monitorowanie dodatkowych ryzyk poza umową główną w celu określenia wpływu na utrzymanie portfela).
11. Analiza wskaźników zadowolenia klientów.
12. Programy lojalnościowe dla klientów.
13. Rozwój systemów umożliwiających kontakt z klientem i jego profesjonalną obsługę.
14. Analiza szczególnie w zakresie: realizacji założeń, istnienia trendów, poziomu zmienności szkodowości.

#### Zadanie 4.

Towarzystwo ubezpieczeń pozostałych osobowych i majątkowych XXL Insurance S.A. w palecie swoich produktów oferuje specjalne ubezpieczenia o nazwie „*InsurXXL*”. Ubezpieczenie oferowane jest dla osób, które uprawiają sporty ekstremalne (wspinaczka, nurkowanie, narciarstwo). Usługa ma charakter krótkookresowy. W okresach rocznych wymagane jest odnowienie ochrony i opłacenie składki całkowitej jednorazowo. Istotą produktu jest to, że Towarzystwo wypłaca świadczenie w momencie kiedy klient w trakcie uprawiania sportu wskutek nieszczęśliwego wypadku uzna uszczerbku na zdrowiu. Świadczenie wypłacane jest w sytuacji kiedy klient jest hospitalizowany oraz specjalna komisja lekarska określi stopień utraty zdrowia w skutek odniesionych ran. Wysokość świadczenia zależy od stopnia utraty zdrowia przez klienta Towarzystwa. W opinii komisji lekarskiej uwzględniona jest także utrata zdrowia psychicznego oraz możliwość powrotu do uprawiania danego sportu po wyleczeniu. Towarzystwo posiada długoletnią tradycję w działalności ubezpieczeniowej. Początkowo działało na rynku polskim jednakże zainteresowanie ofertą oraz osiągnięte wyniki pozwoliły na dynamiczny rozwój. Obecnie Towarzystwo oferuje swoje usługi praktycznie na terenie całej Unii Europejskiej. Innowacyjna oferta ochrony zdrowia oraz rosnący popyt na tego rodzaju usługę spowodowały, że Towarzystwo jest liderem w opisanym niszy. Zarząd XXL Insurance S.A. chciałby zoptymalizować wymagany wymóg kapitałowy. Jako aktuariusz Towarzystwa oceń stosowność zastosowania formuły standardowej w celu wyznaczenia całkowitego wymogu kapitałowego oraz podaj i opisz wymogi jakie powinien spełniać model wewnętrzny, który mógłby być użyty przez Towarzystwo. Czy zmiana systemu wypłacanego świadczenia na sumę stałą niezależną od stopnia utraty zdrowia sportowca tylko od faktu czy wypadek wystąpił czy nie wpłynie na sposób wyznaczania wymogu kapitałowego, jeśli Towarzystwo zdecyduje się na wdrożenie modelu wewnętrznego? Czy, w sytuacji jeśli wymóg kapitałowy wyliczony przy zastosowaniu modelu wewnętrznego będzie wyższy od wymogu wyznaczonego przy użyciu formuły standardowej Towarzystwo powinno wprowadzić model wewnętrzny?

#### Rozwiązanie:

Podstawowe wymogi jakie powinien spełniać model wewnętrzny to:

- test użyteczności – model wewnętrzny powinien pełnić istotną rolę m.in. w systemie zarządzania ryzykiem, czy w procesie oceny i alokacji kapitału ekonomicznego oraz kapitału zabezpieczającego wypłacalność,
- standardy statystyczne – zakład ubezpieczeń powinien przedstawić m.in. metody wykorzystywane do wyznaczania prognozy funkcji rozkładu prawdopodobieństwa; zastosowane techniki ograniczania ryzyka; wykazać, iż dane są dokładne, kompletne i adekwatne,
- standardy kalibracji – zakład ubezpieczeń powinien przedstawić zastosowane m.in. miary ryzyka, horyzont czasowy, poziom ufności do kalibracji poszczególnych modułów ryzyka w modelu wewnętrznym,
- przypisanie zysków i strat – zakład ubezpieczeń powinien przedstawić źródła i przyczyny powstawania zysków i strat w działalności zakładu ubezpieczeń oraz w jaki sposób zostało to odzwierciedlone w modelu wewnętrznym,
- standardy walidacji – zakład ubezpieczeń powinien przedstawić metodologię oraz sposób przeprowadzania analiz wrażliwości, narzędzi stosowanych do walidacji modelu wewnętrznego,
- standardy dokumentacji – zakład ubezpieczeń powinien sporządzić dokumentację przedstawiającą m.in. strukturę, założenia, podstawy matematyczne i empiryczne modelu wewnętrznego,
- zakład ubezpieczeń powinien posiadać politykę wprowadzania zmian w modelu wewnętrznym.

Zmiana systemu wypłaty świadczenia ułatwi kalkulacje bowiem nie będzie konieczności szacowania intensywności wypadków. Powinno wprowadzić bowiem model wewnętrzny uwzględnia specyfikę ubezpieczonego ryzyka.

**Zadanie 5.**

Rozpatrujemy obligację skarbową. Obecna stopa *forward* (stopa w czasie od 0 do 1 – pierwszoroczna) jest równa 2,1%, stopa *forward* drugoroczna (w roku 1 do roku 2) jest równa 3,2%, stopa *forward* w trzecim okresie wynosi 4,3% (w roku 2 do roku 3). Dział inwestycyjny dokonał zakupu 3 letniej obligacji o wartości nominalnej równej 100.000 zł i kuponie równym 9.000 zł. Jaka będzie roczna stopa zwrotu z obligacji jeśli po pierwszym roku rynkowa krzywa dochodowości będzie płaska na poziomie 4%.

**Rozwiązanie:**

1. Wyznaczamy obecną cenę obligacji:

$$\frac{9.000}{1,021} + \frac{9.000}{1,021 \cdot 1,032} + \frac{109.000}{1,021 \cdot 1,032 \cdot 1,043} = \quad \mathbf{116,539.33 \text{ zł}}$$

2. Wyznaczamy cenę po zapłaceniu pierwszego kuponu (na koniec pierwszego roku):

$$\frac{9.000}{1,04} + \frac{109.000}{1,04^2} = \quad \mathbf{109,430.47 \text{ zł}}$$

Wyznaczam stopę zwrotu z inwestycji w daną obligację. Cena zakupu wyniosła 113.700,90 zł. W okresie do wykupu obligacja wygeneruje przepływy równe 109,430.47 zł + 9.000 zł = 118,430.47 zł

3. Stopa zwrotu z obligacji :  $\frac{118430,47}{116539,33} - 1 = 0,0162$  (**1,62%**)

**Przy danych założeniach roczna stopa zwrotu wyniesie 1,62%.**

**Zadanie 6.**

Organizacja zrzeszająca niezależne firmy doradcze planuje powołanie własnego towarzystwa ubezpieczeń w celu objęcia ochroną ubezpieczeniową odpowiedzialności zawodowej doradców finansowych (*professional liability insurance PLI*) zatrudnionych w firmach będących jej członkami. Działanie to ma na celu zaproponowanie doradcom ubezpieczenia *PLI* ze składką niższą od składki rynkowej, bez uwzględniania ich historii szkodowej. Dane są następujące informacje:

- organizacja zrzesza 250 firm doradczych zatrudniających do 10 doradców (mała firma) oraz 40 firm zatrudniających po 50 doradców (duża firma);
- małe firmy ubezpieczą średnią liczbę zatrudnionych doradców;
- duże firmy jeśli podejmą decyzję o ubezpieczeniu wówczas ubezpieczą wszystkich zatrudnionych doradców;
- składka dotycząca podobnych polis w okresie ostatnich trzech lat na doradcę wyniosła 1.900 zł/rocznie, w tym 400 zł to narzuty na koszty;
- w ostatnim roku składka rynkowa wzrosła do 2.600 zł., narzut kosztów pozostał ten sam.

**Tablica 6.1.** Parametry opisujące szkody z portfela.

	99,5% szkód:	0,5% szkód:
Średni poziom szkód	15.000 zł,	500 tys. zł
Częstość szkód w ostatnim roku	0,15	
Odchylenie standardowe wartości szkód	20% wartości zagregowanej szkód	
<b>Percentyl 99,5 rozkładu szkód znajduje się na poziomie 4,5 odchylenia standardowego powyżej wartości średniej zagregowanych.</b>		

**Tablica 6.2.** Parametry opisujące ryzyko działalności lokacyjnej.

Oczekiwana stopa zwrotu z portfela lokat	2,5%
Odchylenie standardowe stopy zwrotu z portfela	20% średnich dochodów z inwestycji
Percentyl 0,5 rozkładu dochodów z inwestycji znajduje się na poziomie 2,2 odchylenia standardowego powyżej wartości średniej	
Oczekiwane straty z portfela inwestycyjnego ( <i>credit default losses</i> ) oszacowano na poziomie 0,8% rocznie	
Odchylenie standardowe rozkładu strat	50% wartości średniej
<b>Percentyl 99,5 rozkładu strat z portfela inwestycyjnego znajduje się na poziomie 2,5 odchylenia standardowego powyżej średniej.</b>	

**Tablica 6.3.** Zidentyfikowane parametry ryzyka operacyjnego.

	Prawdopodobieństwo wystąpienia	Szacowane straty [tys. zł]
<b>Ryzyko I</b>	0,05	700
<b>Ryzyko II</b>	0,04	950
<b>Ryzyko III</b>	0,0025	1.600

---

Zgodnie z obowiązującymi przepisami prawa organ nadzoru wymaga aby Towarzystwo ubezpieczeniowe posiadało kapitał regulacyjny w wysokości co najmniej najlepszego oszacowania rezerw wynikających z zawartych polis ubezpieczeniowych. Oszacowany kapitał powinien gwarantować, że Towarzystwo będzie w stanie realizować zobowiązania wynikające z zawartych polis ubezpieczeniowych z prawdopodobieństwem 99,5%, przy założeniu niekorzystnego scenariusza rozwoju szkód.

Jako aktuariusz Towarzystwa **oblicz początkowy minimalny kapitał regulacyjny dla planowanego Towarzystwa ubezpieczeń**, opisując przyjęte założenia. W obliczeniach wykorzystaj także następujące informacje: 50% firm (zarówno małych jak i dużych) wykupi polisy *PLI* dla swoich doradców. Ryzyko rynkowe i ryzyko kredytowe są zależne w 100%. Koszty szkód oraz ryzyko operacyjne są niezależne od ryzyka rynkowego i kredytowego.

---

### **Rozwiązanie:**

Wartość minimalnego wymogu kapitałowego wynosi **4 469 176,32 zł**

Wartość ta może różnić się w zależności od przyjętych ostatecznych założeń, jednak powinna wahać się w granicach 1,5 mln zł.

Zadanie było pozytywnie ocenione jeśli kandydat wykazał poprawny tok rozumowania oraz zastosował właściwe podejście do wyliczenia wymogu kapitałowego.

Kandydat powinien także zwrócić uwagę na fakt, że prawdopodobieństwo ryzyka III jest poza 99,5 percentylem dlatego narzut kapitałowy w związku z tym ryzykiem jest równy zero.

W przypadku ryzyka I oraz II można było założyć, że ryzyka te są rozłożone w ogonie rozkładu i przyjąć wielkość odpowiednio niższą (np. o 10%) niż 700.000 zł. i 950.000 zł.



**Zadanie 7.**

Tablica 7.1 zawiera zestawianie historycznych danych szkodowych dla portfela ubezpieczeń odpowiedzialności cywilnej posiadaczy pojazdów mechanicznych *Towarzystwa Ubezpieczeń S.A.* Dane te wykorzystywane są do wyznaczenia rezerwy IBNR.

**Tablica 7.1.** Trójkąt szkód nieskumulowanych (w mln. zł.).

Lata zajścia szkody (i)	Lata rozwoju szkody (j)			
	0	1	2	3
0 (2016)	675	475	265	105
1 (2017)	560	425	315	
2 (2018)	578	225		
3 (2019)	520			

Na podstawie danych zawartych w tablicy 7.1 oszacuj wielkość rezerwy na niewypłacone odszkodowania i świadczenia na koniec analizowanego okresu wykorzystując prostą technikę *chain ladder (CL)* oraz *metodę Bornhuettera-Fergusona (B-F)*. Porównaj otrzymane wyniki. Uzasadnij, czy można jednoznacznie stwierdzić, która metoda daje bardziej adekwatny wynik dotyczący szacowania poziomu zobowiązań zakładu ubezpieczeń. W obliczeniach wykorzystaj dane zawarte w tablicy 7.2. Jako miarę ekspozycji w metodzie B-F przyjmij składkę zarobioną. Czy metoda B-F dopuszcza inne maryl ekspozycji? Jeśli TAK to wymień jakie?

**Tablica 7.2.** Parametry portfela ubezpieczeń towarzystwa.

	Liczba czynnych polis [tys. szt.]	Składka przypisana brutto [mln. zł]	ULR (współczynnik szkodowości)	Zmiana stanu rezerwy składki brutto [mln zł]
	1	2	3	4
2016	102	680	99%	75
2017	105	710	98%	85
2018	110	805	95%	100
2019	115	975	99%	105

**Rozwiązanie:**

Wartość rezerwy IBNR wyliczona metodą CL wynosi 1.021 mln zł.

Wartość rezerwy wyliczona metoda B-F wynosi 617 mln zł.

Wyliczając rezerwę IBNR dwoma wskazanymi metodami otrzymaliśmy różnicę na poziomie 405 mln zł. co stanowi 40% rezerwy wyliczonej metodą Chain-Ladder i o taką kwotę byłby lepszy wynik finansowy zakładu ubezpieczeń gdyby zastosował metodę B-F. Nie można jednoznacznie stwierdzić, która z powyższych metod jest lepsza i powinna być stosowana. Przy wyliczaniu rezerwy IBNR dla danej linii należy również uwzględnić jej specyfikę.

Metoda BF dopuszcza inne miary ekspozycji. Może to być na przykład składka przypisana brutto.

**Zadanie 8.**

Towarzystwo ubezpieczeń RO S.A. podjęło działania zmierzające do ubezpieczenia ryzyka operacyjnego banków. Kilku z obecnych klientów towarzystwa RO S.A. zawnioskowało o stworzenie takiej oferty. Każdy z nich przesłał to RO S.A. dane dotyczące poziomu szkód wynikających z realizacji ryzyka operacyjnego z ostatnich kilku lat. Na tej podstawie towarzystwo RO S.A. planuje ustalić poziom składki rocznej za proponowane ubezpieczenie. Szeregi czasowe rocznych wartości szkód związanych z danym ryzykiem dla wszystkich klientów RO S.A., którzy zgłosili swoje zainteresowanie mają następujące parametry statystyczne:

**Tablica 8.1.** Parametry statystyczne szeregów czasowych szkód wynikających z ryzyka operacyjnego klientów RO S.A. (dane w zł).

Klient	Średnia arytmetyczna	Wariancja
Bank 1 S.A.	22 000,00	220 000 000,00
Bank 2 S.A.	20 000,00	165 000 000,00
Bank 3 S.A.	12 000,00	45 000 000,00
Bank 4 S.A.	42 000,00	500 000 000,00

W związku z brakiem doświadczenia z ubezpieczeniem przedmiotowego ryzyka i z jego wyceną, w celu skalkulowania składki rocznej za takie ubezpieczenie zaproponowano następujące kroki:

- dopasowanie rozkładu gamma za pomocą momentów (przy zastosowanej parametryzacji rozkładu  $E(X) = \alpha / \lambda$ ,  $V(X) = \alpha / \lambda^2$  gamma: ) do całkowitych szkód z tytułu ryzyka operacyjnego, zaraportowanych przez klientów RO S.A.,
- wyliczenie wymogu kapitałowego w ujęciu jednostkowym przy pomocy VaR z założonym poziomem ufności równym 99,5%,
- wyznaczenie składek jako wartość oczekiwanej szkód zaraportowanych, powiększonych o koszt kapitału oraz powiększonych o 20% narzutu na pokrycie kosztów i zapewnienie zakładanego poziomu zysku. Koszt kapitału został określony jako 7% wymogu kapitałowego w ujęciu jednostkowym.

Jako aktuariusz Towarzystwa RO S.A. podaj definicję ryzyka operacyjnego oraz oblicz poziom składek dla każdego z klientów RO S.A. wykorzystując parametry statystyczne podane w tablicy 8.1 oraz wartości strat z rozkładu gamma (tablica 8.2) dla 0,995 kwantyla.

**Tablica 8.2.** Kwantyle rzędu 0,995 dla rozkładu gamma dla danych parametrów  $\alpha$  i  $\lambda$ 

Alpha ( $\alpha$ )	Lambda ( $\lambda$ )	0,00010	0,00012	0,00027	0,00008
2,20		78 145	64 470	29 304	93 030
2,42		82 350	67 939	30 881	98 035
3,20		96 234	79 393	36 088	114 564
3,53		101 865	84 038	38 199	121 268

- (i) Jaki byłby wymóg kapitałowy dla RO S.A., gdyby wszyscy klienci zdecydowali się na zawarcie umowy ubezpieczenia przy danym poziomie składek oraz przy założeniu, że ryzyka operacyjne poszczególnych klientów są od siebie niezależne.
- (ii) Jaki byłby wymóg kapitałowy dla RO S.A., gdyby wszyscy klienci zdecydowali się na zawarcie umowy ubezpieczenia przy danym poziomie składek oraz przy założeniu, że ryzyko operacyjne Banku 4 S.A. jest zależne od ryzyka operacyjnego Banku 3 S.A. ponieważ oba podmioty należą do jednej grupy kapitałowej. Korelacja pomiędzy ryzykiem operacyjnym Banku 4, a ryzykiem operacyjnym Banku 3 S.A. wynosi 0,25.

---

### Rozwiązanie:

Definicja:

Ryzyko operacyjne oznacza ryzyko straty wynikające z niewłaściwych lub błędnych procesów wewnętrznych, z działań personelu lub systemów oraz ze zdarzeń zewnętrznych.

### Kroki

Stosując metodę momentów możemy zapisać, że parametry rozkładu są równe:

$$E(X) = \alpha / \lambda$$

$$V(X) = \alpha / \lambda^2$$

stąd, po przekształceniach otrzymujemy:

$$\lambda = E(X) / V(X)$$

$$\alpha = E(X)^2 / V(X)$$

Wyliczenie parametrów zestawiono poniżej:

<b>Klient</b>	<b>Alpha(<math>\alpha</math>)</b>	<b>Lambda (<math>\lambda</math>)</b>
Bank 1 S.A.	2,20	0,00010
Bank 2 S.A.	2,42	0,00012
Bank 3 S.A.	3,20	0,00027
Bank 4 S.A.	3,53	0,00008

Na podstawie wartości 99,5 kwantyla z tablic rozkładu gamma dla obliczonych parametrów *alpha* i *lambda* otrzymujemy wymóg kapitałowy dla poszczególnych klientów

<b>Klient</b>	<b>Wymóg kapitałowy</b>
Bank 1 S.A.	78 145,17
Bank 2 S.A.	67 938,59
Bank 3 S.A.	36 087,78
Bank 4 S.A.	121 267,57

Koszt kapitału stanowi 7%  
wymogu kapitałowego 0,07

<b>Klient</b>	<b>Koszt kapitału</b>
Bank 1 S.A.	5 470,16
Bank 2 S.A.	4 755,70
Bank 3 S.A.	2 526,14
Bank 4 S.A.	8 488,73

Uwzględniając narzut w wysokości 20% składki policzone dla poszczególnych klientów są równe:

1,20

<b>Klient</b>	<b>Składka ubezpieczeniowa</b>
Bank 1 S.A.	32 964,19
Bank 2 S.A.	29 706,84
Bank 3 S.A.	17 431,37
Bank 4 S.A.	60 586,48

- |      |   |                   |
|------|---|-------------------|
| (i)  | Wymóg kapitałowy w sytuacji przyjęcia oferty przez wszystkich klientów RO S.A. wynosi   | <b>163 494,56</b> |
| (ii) | Wymóg kapitałowy przy założeniu korelacji pomiędzy ryzykiem Banku 4 S.A. a Banku 3 S.A. | <b>113 624,19</b> |

**Zadanie 9.**

Na podstawie poniższych informacji wyznacz składkę netto  $P$  płaconą na początku każdego roku.

Mężczyzna w wieku 20-lat wykupił polisę bezterminową na życie ze świadczeniem 20.000,- zł, wypłacanym na koniec roku śmierci. Po 25 latach osoba ta zawiesza płaconie składek i otrzymuje dwie propozycje równoważnych aktuarialnie rozwiązań:

- propozycja pierwsza zamiany polisy na polisę *bezskładkową* ze świadczeniem zredukowanym do 10.000,- zł;
- propozycja druga polegająca na wypłacie rezerwy netto w formie dożywotniej renty w wysokości 800 zł, wypłacanej na początek każdego roku.

**Rozwiązanie:**

Na początku należy zapisać równania wynikające z analiza każdej z propozycji.

Analiza pierwszej propozycji prowadzi do następującego równania:

$$0,50 = \frac{{}_{25}V_{20}}{A_{45}} = 1 - \frac{P_{20}}{P_{45}}$$

Analiza drugiej propozycji do następującego równania:

$$\frac{{}_{25}V_{20}}{\ddot{a}_{45}} = 0,04$$

Korzystając z własności, że:

$$\frac{{}_{25}V_{20}}{\ddot{a}_{45}} = \frac{{}_{25}V_{20}}{A_{45}} * \frac{A_{45}}{\ddot{a}_{45}} = \left(1 - \frac{P_{20}}{P_{45}}\right) * P_{45} = P_{45} - P_{20}$$

W efekcie otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{cases} 0,04 = P_{45} - P_{20} \\ 0,50 = 1 - \frac{P_{20}}{P_{45}} \end{cases}$$

Powyższy układ równań należy rozwiązać względem  $P_{20}$ ; otrzymujemy  $P_{20}=0,04$  zł. Po przemnożeniu przez sumę ubezpieczenia poziom rocznej składki netto  $P$  wynosi **800zł**.

**Zadanie 10.**

Jako aktuariusz w wybranym towarzystwie ubezpieczeń analizujesz ryzyko kredytowe związane z brakiem możliwości spłaty obligacji korporacyjnych. W ramach przeprowadzanej analizy zostałeś poproszony o obliczenie prawdopodobieństwa braku spłaty dwóch obligacji korporacyjnych X i Y jednocześnie. Towarzystwo posiada dane dotyczące prawdopodobieństw niewypłacalności emitentów obligacji w kolejnym roku tj.: dla obligacji X równe 0,07; dla obligacji Y równe 0,20. W celu wyznaczenia łącznego prawdopodobieństwa niewypłacalności dłużników zamierzasz wykorzystać poniżej zdefiniowane kopule:

$$\text{Generator kopuli Gumbela: } Gu\Psi_{\alpha}(F(x)) = [-\ln(F(x))]^{\alpha}$$

$$\text{Generator kopuli Claytona: } Cl\Psi_{\alpha}(F(x)) = 1/\alpha \cdot [(F(x))^{-\alpha} - 1]$$

Oblicz łączne prawdopodobieństwo niewypłacalności przy założeniu, że parametr  $\alpha$  jest równy 2. Jednocześnie wyjaśnij, który z podanych generatorów będzie bardziej odpowiedni do zastosowania w rozważanym problemie.

**Rozwiązanie:****Gumbela:**

obligacja X	7,071664
Obligacja Y	2,59029

Sumując te dwa wyniki i stosując funkcje pseudo-odwrotną

**prawdopodobieństwo łączne 0,04467**

**Claytona**

obligacja X	101,5408
obligacja Y	12,00

Sumując te dwa wyniki i stosując funkcje pseudo-odwrotną

**prawdopodobieństwo łączne: 0,0662148**

W niepewnym otoczeniu ekonomicznym powinno się uwzględnić kopulę Claytona, która charakteryzuje się niższą zależnością rozkładów brzegowych, jednocześnie prawdopodobieństwa niewypłacalności w przypadku obligacji X i Y znacznie się od siebie różnią.





**Egzamin dla Aktuariuszy****Sesja egzaminacyjna w dniu 19 Listopada 2019r.****Zarządzanie ryzykiem zakładu ubezpieczeń****Arkusz ocen**

Zadanie nr	Punktacja
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	