Komisja Egzaminacyjna dla Aktuariuszy

LXXX Egzamin dla Aktuariuszy

Sesja egzaminacyjna w dniu 4 marca 2019r.

Matematyka pozostałych ubezpieczeń osobowych i majątkowych

Imię i nazwisko osoby egzaminowanej: ....

Czas trwania egzaminu: 100 minut

Zadanie 1.

Dla pewnego ubezpieczonego liczby szkód N_1, N_2, N_3, N_4 w kolejnych czterech latach są niezależnymi zmiennymi losowymi o identycznym rozkładzie równomiernym:

$\Pr(N_1 = k) = 1/10, \qquad k = 0,1,2,\dots,9$

Prawdopodobieństwo, że w ciągu 4 lat ubezpieczony będzie miał łącznie dokładnie 7 szkód wynosi:

(A) 0.90%

(B) 1.05%

(C) 1.20%

(D) 1.40%

(E) 1.65%

Zadanie 2.

Mamy niepełną informację o rozkładzie wartości pojedynczej szkody Y. O dystrybuancie tej zmiennej wiemy, że:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & gdy \quad y \leq 0 \\ 1 - \exp(-y) & gdy \quad y \in [0,1) \cup [2,\infty) \end{cases}$$

Nie wiemy natomiast jak dystrybuanta przebiega na odcinku $y \in [1,2)$. Opierając się na tych informacjach szacujemy od dołu wartość oczekiwaną nadwyżki szkody ponad 3/2. Najlepsze oszacowanie (największa z takich liczb g, że mamy pewność iż $E[(Y-3/2)_+] \geq g$), wynosi:

(A) $\frac{1}{2}\exp(-1)$

(B) $\frac{1}{2}[\exp(-1) + \exp(-2)]$

(C) $\exp(-3/2)$

(D) $\frac{3}{2}\exp(-2)$

(E) $\frac{1}{3}\left[\exp(-1) + \exp\left(-\frac{3}{2}\right) + \exp(-2)\right]$

Zadanie 3.

Przyjmijmy oznaczenie:

$$\overline{x}_d = \begin{cases} x-d & \textit{jeśli} \quad x > d \\ 0 & \textit{jeśli} \quad x \le d \end{cases}$$

Jeśli więc zmienna losowa X wyraża wartość szkody, to zmienna $\overline{X}_d$ nadwyżkę szkody ponad d. Załóżmy teraz, że X ma rozkład dyskretny określony na liczbach naturalnych. Jeśli w dodatku ograniczymy zainteresowanie do zmiennych $\overline{X}_d$ dla wartości $d = 0$, 1, 2, 3, ..., to wartości oczekiwane tych zmiennych spełniają zależność rekurencyjną:

$$E\left(\overline{X}_{d+1}\right) = E\left(\overline{X}_d\right) - \Pr(X > d)$$

Jeśli wiesz, jak pokazać prawdziwość powyższej zależności, łatwo wskażesz, która z zależności poniższych (dotyczących momentów zwykłych drugiego rzędu) jest prawdziwa:

(A) $E\left(\overline{X}_{d+1}^{\,2}\right) = E\left(\overline{X}_d^{\,2}\right) - 2 \cdot E\left(\overline{X}_d\right) + \Pr(X > d)$

(B) $E\left(\overline{X}_{d+1}^{\,2}\right) = E\left(\overline{X}_d^{\,2}\right) - 2 \cdot \Pr(X > d)$

(C) $E\left(\overline{X}_{d+1}^{\,2}\right) = E\left(\overline{X}_d^{\,2}\right) - 2 \cdot E\left(\overline{X}_d\right) - \Pr(X > d)$

(D) $E\left(\overline{X}_{d+1}^{\,2}\right) = E\left(\overline{X}_d^{\,2}\right) - 2 \cdot E\left(\overline{X}_d\right)$

(E) $E\left(\overline{X}_{d+1}^{\,2}\right) = E\left(\overline{X}_d^{\,2}\right) - E\left(\overline{X}_d\right)$

Zadanie 4.

Rozważamy proces nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym postaci:
$U_n = u + c \cdot n - S_n$, $n = 0,1,2,...$, gdzie:

- $S_n = W_1 + W_2 + ... + W_n$ jest procesem o przyrostach i.i.d takich, że $\Pr(W_1 \geq 0) = 1$.
- Zakładamy, że $c < E(W_1) < \infty$, wobec czego ruina jest pewna.

Niech:

- $T(u) = \inf\{n: \ n \in \{0,1,2,...\}, \ U_n < 0\}$ oznacza czas ruiny, zaś:
- $E(T(u))$ oczekiwany czas ruiny (traktowany explicite jako funkcja zmiennej u).

Oczywiście dla ujemnych wartości u zachodzi $E(T(u)) = 0$.

Która z poniższych tożsamości całkowych spełniona jest przez funkcję $E(T(u))$ dla nieujemnych wartości u?

(A) $E(T(u)) = \int_0^{u+c} E(T(u+c-x))dF_W(x)$

(B) $E(T(u)) = 1 + \int_0^{u+c} E(T(u+c-x))dF_W(x)$

(C) $E(T(u)) = 1 + \int_0^{u+c} [1 + E(T(u+c-x))]dF_W(x)$

(D) $E(T(u)) = 1 - F_W(u+c) + \int_0^{u+c} E(T(u+c-x))dF_W(x)$

(E) $E(T(u)) = F_W(u+c) + \int_0^{u+c} E(T(u+c-x))dF_W(x)$

Zadanie 5.
Rozważamy proces nadwyżki ubezpieczyciela z czasem dyskretnym:
$U_n = u + c \cdot n - S_n, \quad n = 0,1,2,\ldots$
gdzie $S_n = W_1 + W_2 + \ldots + W_n$ jest procesem o przyrostach i.i.d.

Wyznaczamy składkę c przyjmując dla uproszczenia, iż prawdopodobieństwo ruiny ε spełnia równość $\varepsilon = \exp(-Ru)$, gdzie R to *adjustment coefficient*, zaś u to nadwyżka początkowa.

Przyjmujemy przy tym, iż zmienna W_1 o wartości oczekiwanej, odchyleniu standardowym i dodatniej skośności równym odpowiednio μ_W, σ_W, γ_W, posiada funkcję generującą momenty, oraz iż wyrazy wyższych rzędów w rozwinięciu logarytmu funkcji generującej momenty są pomijalne.

Przyjmujemy także konkretne założenia liczbowe:
- nadwyżka początkowa jest równa: $u = 3\sigma_W$,
- przyjęty poziom bezpieczeństwa wynosi: $\varepsilon = \exp(-3)$

W rezultacie otrzymujemy formułę składki:
$c = \mu_W + \sigma_W(a_0 + a_1\gamma_W)$
Wyznacz parametry a_0 oraz a_1 formuły.

(A) $(a_0, a_1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$

(B) $(a_0, a_1) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

(C) $(a_0, a_1) = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{8}\right)$

(D) $(a_0, a_1) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{6}\right)$

(E) $(a_0, a_1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

Zadanie 6.

Proces nadwyżki ubezpieczyciela ma postać:

$U(t) = u + c \cdot t - S(t)$

gdzie:

- u – to wartość początkowa nadwyżki,
- $S(t)$ - to złożony proces Poissona z parametrem częstotliwości λ, wyrażający zagregowaną wartość szkód do momentu t,
- składka c równa jest oczekiwanej wartości szkód za okres jednostkowy pomnożonej przez czynnik $(1 + \theta)$.

Niech:

- l_1 będzie wartością, o którą nadwyżka spada poniżej poziomu wyjściowego w pierwszym momencie, w którym do spadku dochodzi (o ile do niego dojdzie),
- $L = l_1 + \cdots + l_N$ to maksymalna całkowita strata, gdzie l_k to k-ty z kolei spadek poniżej poprzedniego rekordu dolnego, zaś N to liczba wystąpień takich spadków w całym przebiegu procesu $U(t)$.

Jeżeli zmienna l_1 ma rozkład określony na przedziale $[0, 2]$ o gęstości równej:

$$f_l(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} & dla \quad 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{3} & dla \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

to funkcja generująca momenty $M_L(r)$ dla r nierównego zeru jest postaci:

(A) $$\frac{r\theta}{1 + r(1+\theta) - \frac{1}{2}e^r(e^r + 1)}$$

(B) $$\frac{3r\theta}{2 + 3r(1+\theta) - \frac{1}{2}e^r(e^r + 1)}$$

(C) $$\frac{3r\theta}{1 + 3r(1+\theta) - \frac{1}{2}e^r(e^r + 1)}$$

(D) $$\frac{3r\theta}{1 + 3r(1+\theta) - e^r(e^r + 1)}$$

(E) $$\frac{3r\theta}{2 + 3r(1+\theta) - e^r(e^r + 1)}$$

Zadanie 7.

W procesie $U(t)$ nadwyżki ubezpieczyciela c oznacza intensywność składki na jednostkę czasu, $u = U(0)$ oznacza nadwyżkę początkową, zaś para (T_n, Y_n) oznacza moment zajścia i wartość n-tej szkody. Oznaczmy przez $\Delta T_n = T_n - T_{n-1}$ czas oczekiwania na n-tą szkodę (oczywiście $\Delta T_1 = T_1$).

Przyjmujemy, że:

- $\Delta T_1, Y_1, \Delta T_2, Y_2, \Delta T_3, Y_3, \ldots$ są niezależne,
- $\Delta T_1, \Delta T_2, \Delta T_3, \ldots$ mają ten sam rozkład,
- $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ mają ten sam rozkład

Rozważmy model 1, gdzie:

- ΔT_1 ma rozkład Gamma z parametrami $(1, \lambda)$ o wartości oczekiwanej λ^{-1},
- Y_1 ma rozkład Gamma z parametrami (α, β) o wartości oczekiwanej $\alpha\beta^{-1}$;

oraz model 2, gdzie:

- ΔT_1 ma rozkład Gamma z parametrami $(2, \lambda)$ o wartości oczekiwanej $2\lambda^{-1}$,
- Y ma rozkład Gamma z parametrami $(2\alpha, \beta)$ o wartości oczekiwanej $2\alpha\beta^{-1}$;

Oznaczmy współczynnik dopasowania oraz funkcję prawdopodobieństwa ruiny w pierwszym modelu przez R_1 oraz $\Psi_1(u)$, zaś w drugim przez R_2 oraz $\Psi_2(u)$.

Załóżmy, że $c > \lambda\beta^{-1}$.

Spośród poniższych zdań wybierz zdanie prawdziwe:

(A) $R_1 = R_2$ oraz $\forall_{u \geq 0} \Psi_1(u) < \Psi_2(u)$

(B) $R_1 = R_2$ oraz $\forall_{u \geq 0} \Psi_1(u) > \Psi_2(u)$

(C) $R_1 > R_2$ oraz $\forall_{u \geq 0} \Psi_1(u) < \Psi_2(u)$

(D) $R_1 < R_2$ oraz $\forall_{u \geq 0} \Psi_1(u) > \Psi_2(u)$

(E) Żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa

Zadanie 8.

Liczba szkód N w ciągu roku w pewnym ubezpieczeniu ma rozkład Poissona z oczekiwaną liczbą szkód równą $E(N) = 22.62$.

Wartość każdej ze szkód $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ ma ten sam rozkład Pareto o dystrybuancie określonej na półosi nieujemnej wzorem:

$$F_{Y_1}(y) = 1 - \left(\frac{1}{1+y}\right)^2$$

Wartości poszczególnych szkód i liczba szkód są niezależnymi zmiennymi losowymi.

Niech:

$$M := \begin{cases} \max\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_N\} & \textit{jeżeli } N > 0 \\ 0 & w\ p.p. \end{cases}$$

Kwantyl rzędu 0.95 rozkładu zmiennej M, a więc taka liczba $y_{0.95}$, dla której:

$$\Pr(M \leq y_{0.95}) = 0.95$$

wynosi:

(A) $y_{0.95} = 16$

(B) $y_{0.95} = 17$

(C) $y_{0.95} = 18$

(D) $y_{0.95} = 19$

(E) $y_{0.95} = 20$

Zadanie 9.

Łączna wartość szkód z pewnego ryzyka $X = Y_1 + \cdots + Y_N$ jest zmienną losową o rozkładzie złożonym. Liczba szkód N ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną równą $3\ln(2)$, zaś wartość pojedynczej szkody Y ma rozkład dany wzorem:

$$\Pr(Y_1 = k) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{0.5^k}{k}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Prawdopodobieństwo, iż łączna wartość szkód wyniesie 6, równa jest:

(A) $\frac{3}{128}$

(B) $\frac{4}{128}$

(C) $\frac{5}{128}$

(D) $\frac{6}{128}$

(E) $\frac{7}{128}$

Zadanie 10.
W kolejnych okresach czasu $j = 1, 2, 3$ ubezpieczony, charakteryzujący się parametrem ryzyka Θ, generuje N_j szkód. Dla danego $\Theta = \theta$ zmienne N_1, N_2, N_3 są warunkowo niezależne i mają taki sam rozkład:

$$Pr(N_1 = k|\Theta = \theta) = \frac{\theta^k}{k!}e^{-\theta}, \qquad k = 0,1,2\ldots$$

Parametr ryzyka Θ przyjmuje w populacji ubezpieczonych wartości: 1 lub 2. Mamy do czynienia z dwuetapowym doświadczeniem losowym:

- najpierw losujemy z populacji ubezpieczonego, a wraz z nim jego wartość parametru ryzyka, zgodnie z rozkładem prawdopodobieństwa: $\Pr(\Theta = 1) = 0.5 = \Pr(\Theta = 2)$
- następnie obserwujemy liczby generowanych przez niego szkód N_1 i N_2.

Wnioskujemy na tej podstawie o liczbie szkód w następnym okresie, czyli N_3.
$Pr(N_3 = 0|N_1 + N_2 = 2)$ wynosi w przybliżeniu:

(A) 0.45

(B) 0.35

(C) 0.29

(D) 0.25

(E) 0.22

Egzamin dla Aktuariuszy
Sesja egzaminacyjna w dniu 4 marca 2019r.

Matematyka pozostałych ubezpieczeń osobowych i majątkowych

Arkusz odpowiedzi*

Imię i nazwisko : ....

Pesel ....

Zadanie nr	Odpowiedź	Punktacja♦
1	C	
2	D	
3	A	
4	B	
5	A	
6	E	
7	B	
8	E	
9	E	
10	C	

* Oceniane są wyłącznie odpowiedzi umieszczone w *Arkuszu odpowiedzi.*

♦ Wypełnia Komisja Egzaminacyjna.